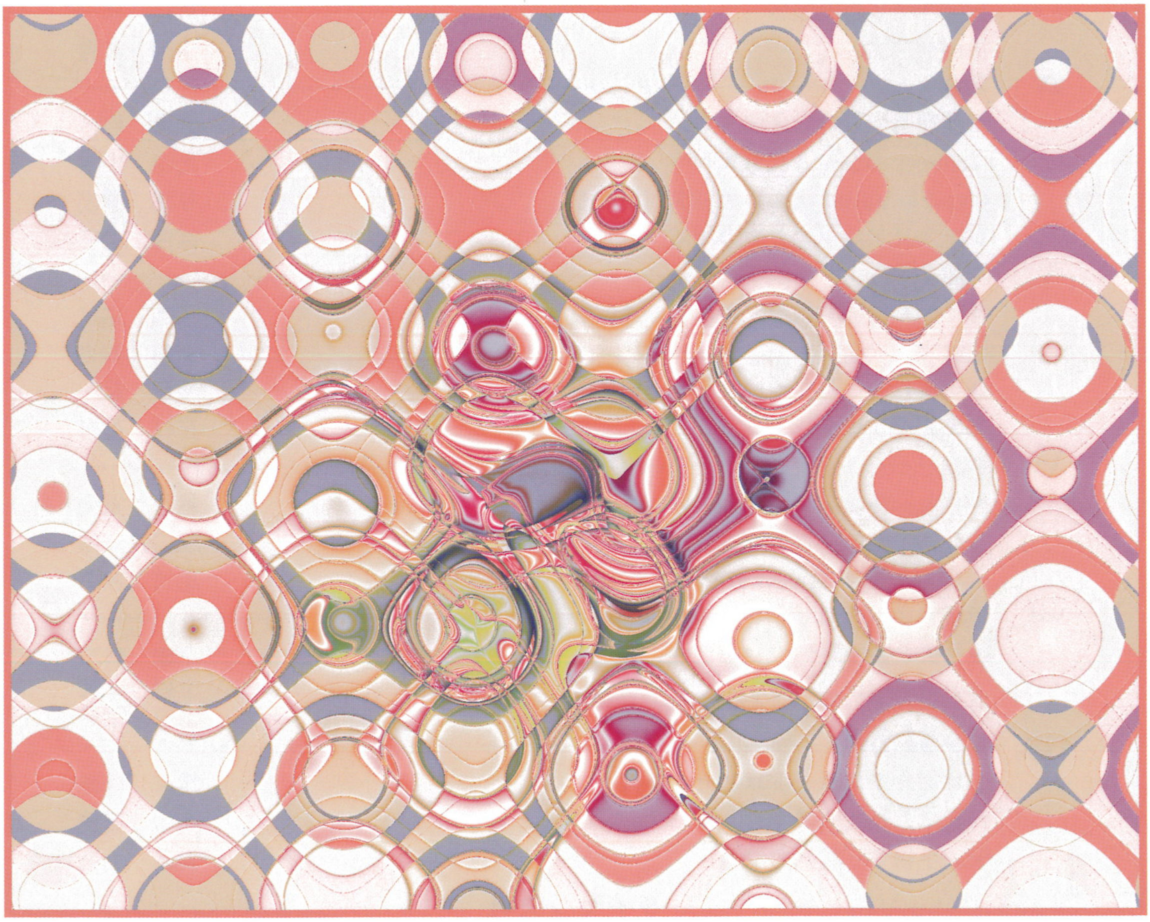
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2009年4月1日発行　第47巻4号　毎月1回1日発行

ISSN 0386—2240

数理科学

4
2009

特集 現代数学はいかに使われているか［幾何編］



No.550

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 550 April 2009

現代数学はいかに使われているか
[幾何編]

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間（本誌のみ）11,000 円，１年間（本誌＋別冊２冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌＋別冊１冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2006 年/8 省略
2006 年/9 ランダムネス
/10 ツイスター理論の拡がり
別冊　場の量子論の拡がり
/11 固有値問題のひろがり
/12 素粒子像の探究
2007 年/1 ヤング図形で遊ぶ物理と数学
/2 ランダム行列の広がり
/3 現代物理における超対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［代数編］
別冊　双対性の世界
/5 数学の直観的理解
/6 物理における位相の世界
/7 代数的物理観
/8 数学における場の量子論
/9 ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊　素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008 年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊　多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊　対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009 年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性

数理科学臨時別冊一覧

07 年/11 コンピュータ将棋の頭脳
07 年/12 計算神経科学への招待
08 年/1 演習 くり込み群
08 年/3 熱方程式で学ぶ逆問題
08 年/5 重力理論講義
08 年/6 代数幾何入門講義
08 年/7 ネットワーク科学への招待
08 年/9 物理のためのリー群とリー代数
08 年/11 量子暗号理論の展開
09 年/1 量子力学の考え方

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

MATHEMATICAL SCIENCES
April 2009 Number 550

特集／現代数学はいかに使われているか［幾何編］

田植えの幾何

小島 定吉

数学は科学の言葉を作ることが一つの使命である．幾何は図形に関する分野なので，こと図形に関しては，当り前のように日常に幾何の言葉が現れる．例えば，この建物は何階建てとか，琵琶湖の面積は何平方キロメータとか．日本は伝統的にこうした数字の根拠がどこにあるかを教育することに熱心だったから，多くの人がその数字を聞いて大体のイメージを掴むことができた．ところが最近は，こうした幾何の感覚が生活の中で活きていることを知っている，あるいは気づいている学生が減った．

中国の高校では，$\sin x$ の微分は $\cos x$ であることは理屈抜きで教えると聞いたことがある．要するに「暗記せよ！」と言うわけである．日本ではまだ，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

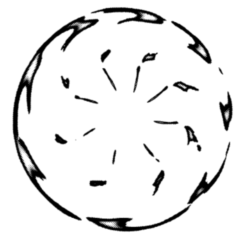
という根拠を説明しているはずである．こうした日本の数学教育の文化に誰が責任を持っているのか分からないが，あるとき初等中等教育からユークリッド幾何の重みが薄れたことにより，日本は負の遺産を抱えたように思う．「幾何は随所で使われている」というかつてのコンセンサスが薄れる傾向は，現場や行政の関係者がレポートを書き，マスコミを通してそれを世に問うようなサイクルではすぐに元には戻らない．

ところで，昨年11月に広島大学に1週間訪問する機会があった．木曜日お昼に某ホテルが経営する学内のフレンチで，松本眞さんの話で盛り上がった．松本さんは情報科学出身で数学に転向（？），稲作にも造形が深い．購入した性能抜群の田植機を手にして，傾斜地で多少不揃いの田んぼにどのような順番で苗を植えるかを考えた．はたとこれは一筆書きの問題であることに気づき，ルートを十分考えた上で田植えを実行したと言うのだ．あぜ道で考え込む松本さんの姿が目に浮かぶ．

幾何が何に役に立つかを考えるのはおそらく幾何学者の仕事ではない．しかしながら，幾何がどこでどのように使われているかを認識しておくのは幾何学者の役目であり，誰かに聞かれたら自信を持って答えたい．一方で，幾何の進展を時代のニーズに合わせタイムリーに追うことができる人は，決して数多くはないという事実もある．幾何に関わる人からの情報発信がタイミングを逸し，幾何が社会から忘れ去られてしまうのは怖い．それゆえ本特集に，幾何を深く理解する白眉の研究者による珠玉の記事が集まったのは，誠に心強いの一言に尽きる，まずはご一読あれ．それに加え，松本さんの稲作にもその効用を見出した話には大変勇気づけられた．

（こじま・さだよし，東京工業大学大学院情報理工学研究科）

幾何学から物理学へ，物理学から幾何学へ



大栗　博司

1. 幾何学と物理学の交流の歴史

古来，人類は自然界の現象に数学的パターンを見出すことによって，自然界の法則を理解しようとしてきた．幾何学図形や音楽は，ニュートン以前の自然哲学者にとって親しみの深い数学的対象であった．プトレマイオスとコペルニクスが，宇宙の中心に何を据えるかは異なるものの，いずれもが惑星の運動を円形軌道で理解しようとしたことは，自然界は美しい幾何学図形で記述されていると考えたからであろう．また，ケプラーも1600年にブラーエの観測データに接する以前には，惑星の軌道をプラトンの正多面体を使って解釈しようとした．1601年のブラーエの死によってその膨大なデータを相続したケプラーは，その数年後には惑星の軌道が楕円であることを理解し，面積速度一定の法則を定式化した．ガリレオもまた自然法則を幾何学で理解しようとした．1623年に書かれた『サジアトーレ（偽金鑑識官）』の中の「(宇宙という）偉大な書物を読むためには，そこに書いてある言葉を学び，文字を習得しておかなければならない．この書物は数学の言葉で書かれている.」というくだりは有名であるが，ガリレオはこれに続けて，「その文字は三角形や円などの幾何学的図形であり，それを知らないと，この書物に書いてあることは一言も読めない.」と書いている．ガリレオにとっては，自然を記述する言葉は幾何学であった．

ガリレオは物質の運動について数々の重要な発見をしたが，それを数学的に定式化するには至らなかった．そのためには**解析学**の創設が必要であったのである．『サジアトーレ』の14年後に，デカルトは『方法序説』の3つの試論の1つ『幾何学』でユークッド幾何学を解析化した[1]．そしてガリレオが他界した翌年に生まれたニュートンによって，力学が「リンゴ」にも「月」にもあてはまる普遍法則として確立し，解析学がその数学的基礎となった．19世紀になると，**代数学**の物理学への応用が始まる．力学系の対称性の分析から連続群の概念が生まれ，さらに量子力学の発見によって表現論が物理学で重要な役割を果たすようになる．

さて，この記事の本題である**幾何学**であるが，解析学の創設後の3世紀の間，幾何学と物理学との関係は淡いものであった．近代における幾何学と物理学との関係において，アインシュタインの一般相対論の発見が画期的な出来事であったことは言うまでもない．しかし，一般相対論の研究で幾何学的手法が本格的に使われるようになったのは1960年代以降のことである．シュバルツシルト時空の大域構造が解明されたのが1960年であり，その後10年の間にホーキングとペンロースは幾何学的方法を駆使してアインシュタイン方程式の一般解について特異点定理などの重要な結果を得た．それ以前には，時空間の特異性の意味（特に座標の取り方による見かけの特異性との区別）も物理学者には広く理解されておらず，例えばブラック

ホールの事象の地平線の解釈や重力波の非線形解の存在についても誤解や混乱があった[2)].

2. 場の量子論の困難

筆者の専門は素粒子論であるので，この分野に限ってみると，1920年代後半から1970年代後半までの半世紀の間，数学と物理学との交流はあまり密接ではなかった．その主要な理由は，素粒子論の基本言語が**場の量子論**だからである．場の量子論は今年で生誕80周年になるが，その発展は紆余曲折を経てきた．1929年にハイゼンベルグとパウリが量子力学を電磁場に適用したのが場の量子論の始まりで，湯川秀樹の中間子論（1934年）はこれが核力の記述にも使えることを示した．しかし，無限自由度を持つ「場」を量子化することで，様々な計算に発散が現れ，それを扱うためのくりこみ理論が整備されるのには20年を要した．その後も，1960年代のS行列理論全盛の時代には，素粒子物理学における場の量子論の有用性に強い疑念が唱えられた[*1)]．トフーフトとベルトマンによるゲージ理論のくりこみ可能性の証明（1972年）と，グロス，ウィルチェックとポリツァーによるゲージ理論の漸近的自由性の発見（1973年）によって，場の量子論はようやく素粒子の基本言語となった．しかし，80歳となった今日でも，場の量子論は数学者からは理論として認知されていない．

場の量子論の「場」とは，時空間の上の関数，もっと一般には時空間上のファイバー束の切断（セクション）を意味する．場の量子論とは，この「場」を自由度とする力学系に量子力学の原理を当てはめようというプログラムのことである．このプログラムは数学的には完成していない．特に，物理学者が使う場の配位についての無限次元積分すなわち**経路積分**には，数学的な定義が与えられていない．しかしその一方で，場の量子論は，素粒子物理学のみならず，超伝導を初めとする物性現象の理解，また天体・宇宙物理学への応用など，現代物理学のいたるところで不可欠になっている．物理学者にとっては，場の量子論，少なくともヤン–ミルズ理論のように漸近的自由性を持つ場の量子論，が存在することは疑いのないことである[3)].

2000年にクレイ数学研究所は千年紀を記念して，ポアンカレ予想やリーマン予想を含む7つの「ミレニアム問題」を提起した．その中の1問に，「ヤン–ミルズ場の量子論を数学的に定式化し，その理論の真空と励起状態のエネルギーとの間に有限の幅があることを示せ.」というものがある[4)].これがミレニアム問題の一つに選ばれた理由は，場の量子論に数学者にも納得できる定義を与えることで，この理論を数学の一分野として確立し，数学の発展に新しい方向が開かれることを期待するからだという.

このように素粒子論の基礎である場の量子論に数学的裏付けがないことが，素粒子物理学者と数学者との交流が妨げられた主要な理由であった．ハーディの薫陶のもとで数学を学び，後に物理学に転向してくりこみ理論の完成に重要な役割を果たしたダイソンは，1972年に「私がつくづく感じることは，過去数世紀にわたってすばらしい成果をもたらしてきた数学と物理学の婚姻関係が，最近になって離婚に終わってしまったということである.」と書いている[5)].

3. ゲージ理論の台頭

この状況は，1970年代後半になって著しく改善された．その第1の理由は素粒子論における**ゲージ理論**の台頭である．ゲージ理論の最初の例はマックスウェルの電磁場理論である．マックスウェル理論では，4次元ベクトルポテンシャルが基本的な自由度であり，その微分が電場や磁場を与える．一般のゲージ理論では，コンパクトなリー群 G について時空間上の G 主束（プリンシパルバンドル）を考え，その**接続** A が基本的自由度となる．接続が与えられるとベクトル束の共変微分 $d_A = d + A$ が決まり，そ

*1） 2008年度のノーベル物理学賞の授賞対象となった南部陽一郎の「素粒子物理学における対称性の自発的破れの機構の発見」は1960年代初頭の業績である．時代背景を考えると，南部の先見性はさらに驚くべきものと言える．

れによって**曲率** F が $F = dA + A \wedge A$ で定義される.（ここでは微分形式の表示法を使用している.）素粒子の「標準模型」ではゲージ群 G を $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ととる．このうち $SU(3)$ に対応する接続はクォークを結びつけ陽子や中性子を作る強い相互作用を，$SU(2) \times U(1)$ に対応する接続は電磁相互作用と原子核のベータ崩壊のもとになる弱い相互作用を媒介する.

一般のゲージ場についてのヤン–ミルズ理論は1954年に構成されたが，上記のような数学的解釈が物理学者に広く知られるようになるのは1970年代以降のことである*2)．（重要な例外の一つとして，ゲージ理論の幾何学の深い理解に基づいてゲージ量子化手続きを確立した，ファデーフとポポフの論文[6]がある.）アティヤーとシンガーは1960年代にベクトル束上の微分作用素のゼロ固有値状態の次元と位相不変量を結びつける指数定理を得たが，当時の物理学者にはほとんど知られていなかった．指数定理は，1980年代になってゲージ理論や超弦理論の量子化の整合性の理解に重要な役割を果たすようになり，今日では理論物理学の基本的な手法の一つとなっている.

ヤン–ミルズ理論はゲージ理論の特別な場合であり，その運動方程式は曲率 F のホッジ双対を ${}^*F$ として，$d_A{}^*F = 0$ と書ける．曲率 F とそのホッジ双対 ${}^*F$ の外積から時空間 M 上の密度関数 $Tr(F \wedge {}^*F)$ を定義し*3)，これを M 上で積分したものを S_{YM} と書くと，運動方程式 $d_A{}^*F = 0$ は S_{YM} をゲージ場について変分したときの停留値条件として得られる．この S_{YM} は**作用関数**と呼ばれ，物理学では大切な概念である.

場の量子論の半古典近似では，S_{YM} が停留値であるだけでなく極小値を取るような場の配位が重要になる．M が4次元でその上のリーマン計量が正定値の場合には，S_{YM} の極小値条件は $F = \pm {}^*F$，すなわち曲率 F が自己双対であることを要求する．自己双対ゲージ場は運動方程式 $d_A{}^*F = 0$ の特解であり，**インスタントン**と呼ばれる．1978年にオックスフォードのアティヤーとヒッチン，モスクワのドリンフェルドとマニンが独立に成し遂げたインスタントンのADHM構成法の発見は，幾何学と物理学の交流の再興の先駆けであった．同年には，江口徹とハンソンによるアインシュタイン方程式のインスタントン解の発見もなされている.

1982年にドナルドソンは，インスタントンのモジュライ空間を使って，4次元ユークリッド空間に通常とは異なる微分構造が存在することを示し，数学界に衝撃を与えた．この出来事は，インスタントンのモジュライ空間が豊富な構造を持つことを印象付けた．インスタントンのモジュライ空間は1990年代後半のゲージ理論や超弦理論の双対性の研究に重要な役割を果たすことになる.

時空 M が3次元の場合には，チャーン–サイモンズ3–形式 $Tr(AdS + \frac{2}{3}A^3)$ を M の上で積分したものを作用関数とすると，その変分から得られる運動方程式はヤン–ミルズ方程式 $d_A{}^*F = 0$ より強い条件である $F = 0$，すなわち接続が平坦であることを要求する．この**チャーン–サイモンズ理論**では，場の量子論であるにも関わらずヒルベルト空間が有限次元になる．このため，ファインマン図の計算でも通常の場の理論に見られるような紫外発散の問題が起きない．ウィッテンは，チャーン–サイモンズ理論を使って，3次元の組みひものジョーンズ不変量に場の理論的解釈を与えた.

4. 超対称性の発見

1970年代に幾何学と物理学の関係が復興した第2の理由は，**超対称性**の発見である．ミンコフスキー時空間は並進，回転，ローレンツ変換の下で不変であり，これらの変換はポアンカレ群をなす．1960年代になり素粒子の分類に群の表現論が重要な役割を果たすようになると，素粒子を分類する対称性と時空間のポアンカレ対称性を組み合わせて，ポアンカレ群を非自明な形で含むより大きな対称性を持つ素粒子模型の構築が試みられた．し

*2) ゲージ理論の概念自身はワイルに遡る.

*3) ここで Tr はリー環の表現空間上のトレースを適当に規格化したものである.

かし，コールマンとマンデュラは，3 次元以上の時空間における非自明な場の量子論の連続対称性は，ポアンカレ群とその他の群との直積に限られ，ポアンカレ群の非自明な拡張は実現できないことを示して，そのような試みに終止符を打った．

コールマンとマンデュラの定理では，場の量子論の連続対称性は通常のリー環で生成され，その微小変換の生成元 a, b はすべて交換子 $[a, b] = ab - ba$ の下で閉じていると仮定していた．これに対し，超対称性の代数は，ボゾン的な元とフェルミオン的な元を持ち，フェルミオン的な元どうしは反交換子 $\{a, b\} = ab + ba$ の下で閉じている（ボゾン的な元は他の任意の元と通常の交換子 $[a, b]$ の下で閉じている）．場の量子論の対称性が**反交換子を含む代数**として実現される場合は，コールマンとマンデュラの想定外であった．超対称性は1970年代初頭に弦理論研究の副産物として発見され，ジェルベと崎田文二はこれが 2 次元の場の量子論の対称性であることを示した．ベスとズミノがこれを 4 次元時空に拡張することで，素粒子の模型の構築への応用が始まった（これと同時期に，旧ソビエト連邦でも超対称性を持つ場の理論が発見されている）．

ウィッテンは超対称性理論が深い幾何学的内容を持つことに気がつき，アティヤー–シンガーの指数定理の類似から，超対称性の**ウィッテン指数**を次のように定義した．超対称性のある模型には，フェルミオン的なエルミート作用素 Q があって，ハミルトニアンは $H = Q^2$ と書ける．このような模型のヒルベルト空間はボゾン的部分空間とフェルミオン的部分空間の直和となり，Q はこの 2 つの部分空間を入れ替えるように作用する．$H = Q^2$ の正値固有空間の上では，Q は逆を持つので，2 つの部分空間は同次元である．一方，ヒルベルト空間の内積の正値性を使うと，H のゼロ固有値状態の上では $Q = 0$ となるので，ボゾン的基底状態とフェルミオン的基底状態の次元は必ずしも一致しない．ウィッテン指数は，この差として定義される．

超対称性を保ちつつハミルトニアン H を連続的に変化させると，H の固有値が上下する．しか

し，$H = 0$ の固有状態が $H > 0$ に持ち上がったり，逆に $H > 0$ の状態が $H = 0$ に降りてくるときには，ボゾン的状態とフェルミオン的状態は常に対になって移動するので，ウィッテン指数は変わらない．連続変形によってハミルトニアン H を簡単化することで，場の量子論の経路積分が有限次元の積分に帰着し，ウィッテン指数の正確な計算ができる場合がある．

5. 超対称ゲージ理論

ウィッテン指数の計算の他にも，経路積分が有限次元の積分に帰着する例がいくつもある．ここでは，その中でも 3 つの有名な例について簡単に触れよう．いずれも 4 次元の超対称性を持つゲージ理論についての結果である．超対称性の生成子の中には時空間のローレンツ変換の下でスピノルとして振る舞うものがあり，以下に登場する N とはこのようなスピノル生成子の数のことである．4 次元のゲージ理論では $N = 4$ が最大である．（重力理論では $N = 8$ が最大である．）

$N = 4$ ゲージ理論では，分配関数（真空振幅とも呼ばれる）がインスタントンのモジュライ空間上の積分，もっと具体的には**モジュライ空間のオイラー類**の計算によって求められる．1994 年にバッファとウィッテンは，中島啓らの数学的結果を使って，分配関数が場の結合定数 g について保形性（S–双対性）を持つことを示した．**S–双対性**は，ゲージ相互作用が弱くなる極限 $g \to 0$ と強くなる極限 $g \to \infty$ とを関係づける大胆な予想であり，バッファとウィッテンの計算以前には物理学者の間でも広く信じられていたわけではなかった．分配関数の S–双対性の発見は，翌年（1995 年）の超弦理論の「双対性革命」の布石となった．

1988 年にウィッテンは，**$N = 2$ ゲージ理論**では，ある種の相関関数がインスタントンのモジュライ空間上の積分として計算できることを示した．これは，4 次元空間 M の微分構造をインスタントンのモジュライ空間の幾何学を使って理解する，**ドナルドソン理論**の場の量子論的表現と言える．

$N = 2$ ゲージ理論では，ハミルトニアンの基底状態がパラメータ（モジュライ）付きで現れることがあり，このモジュライ空間の計量はゲージ理論の物理の理解に重要な量である．1994 年にザイバーグとウィッテンは，物理学的要請からモジュライ空間の構造について予想を立て，それに基づいて計量を決定した．これが，いわゆる**ザイバーグ–ウィッテン解**である．ザイバーグによると，この研究プロジェクトの初期にはウィッテンは計量が厳密に計算できることに懐疑的であったそうである．いわく，「もしそのようなことができれば，非可換ゲージ理論のドナルドソン不変量の計算が，簡単な $U(1)$ ゲージ理論の場合に帰着してしまうではないか」．ザイバーグ–ウィッテン解の発見後，ウィッテンは $U(1)$ ゲージ理論の解空間を使った 4 次元多様体の不変量を提案した．この**ザイバーグ–ウィッテン不変量**は計算が簡単であるにも関わらず，ドナルドソン不変量と同程度強力であり，4 次元幾何学に大きな影響を与えた．ザイバーグ–ウィッテン不変量とドナルドソン不変量は，いずれも $N = 2$ ゲージ理論と関連しているので，等価なものであると予想されているが，その証明はなされていない．2002 年にネクラソフは，ザイバーグ–ウィッテンが物理的要請から定めた計量をインスタントン解析から直接導出した．

このように超対称性のおかげで場の量子論の計算であっても有限次元の積分として数学的意味づけができる場合があり，これによってファインマン図を使った近似的な計算では垣間見ることのできない場の理論の深い構造が明らかになった．

6. 超弦理論

幾何学と物理学の交流が盛んになった第 3 の理由は**超弦理論**の発展である．一般相対性理論と量子力学の統合は理論物理学の最も重要な課題の一つである．超弦理論はこの 2 つの理論を矛盾なく融合し，さらに，これまでに実験・観測されている素粒子現象を基本原理から導出するために必要なすべての材料を含んでいるので，自然界の基本

法則を記述するための数学的枠組みとして注目されている．

ユークリッドの『原論』の第1巻が「点は部分を持たないものである．」という主張から始まるように，幾何学の基礎は大きさや構造を持たない「数学的点」であった．弦理論は1次元に広がったものを基本単位とするので，幾何学に全く新しい見方をもたらそうとしている．弦理論のミラー対称性は，幾何学対象のシンプレクティック構造と複素構造（大きさと形）を入れ替える新しい対称性である．また，点が構造を持たないのに対し，弦は無限の多くの状態がとれるので，様々な代数の表現空間を付与することができる．超弦理論は，幾何学はもとより，整数論や有限群から組合せ論や確率・統計にいたる幅広い分野の間に，既存の垣根を超えた新しい関係を示唆している．

輪のように閉じた弦を考えてみよう．この弦が時空間の中を移動すると，2次元の面ができる．そこで，弦の運動を，面から時空間への写像と考えることができる．超弦理論の計算は，すべての可能な写像のなす無限次元空間の上の積分として表される．場の量子論の経路積分と同様に，このような無限次元の積分には数学的な意味づけがなされていない．しかし，ある種の計算では写像の空間上の積分が有限次元の積分に帰着（局在化）する．トポロジカルな弦理論がその例である．

トポロジカルな弦理論にはA模型とB模型とがあり，**A模型**の計算では面から時空間への写像が正則写像の場合に限られる．正則写像のモジュライ空間は有限次元であり，量子振幅は**グロモフ–ウィッテン不変量**で与えられる．これは$N=4$超対称性ゲージ理論の分配関数が，インスタントン解のモジュライ空間のオイラー類と関係づけられたのと同様の事情である．一方，**B模型**の計算には，面全体を時空間Mの一点に写す定値写像しか寄与しない．このような写像のモジュライ空間はM自身なので，分配関数はM上の積分として書ける．

多様体Mを時空とするA模型と多様体Wを時空とするB模型とが等価であるとき，MとWは**ミラー対称**であると言う．物理的な議論からミラー対称なMとWが知られており，これからMのグロモフ–ウィッテン不変量についての数学的予想が導き出せる．ある種のMについては，このミラー予想はコンセビッチやジベンタルらによって証明されている．

閉じた面の位相は種数によって分類される．球面は種数が0であり，トーラスは種数1を持つ．1993年に，筆者は，ベルシャドスキー，チェコッティ，バッファとの共同研究で，ミラー対称性を任意の種数に拡張した．また，分配関数が，**正則異常方程式**と呼ばれる種数についての漸化式を満たすことを示し，その一般解を与えた．これらの結果から，様々な数学的予想が生まれた．種数1の場合のグロモフ–ウィッテン不変量についての予想は，Mが$\mathbb{C}P^4$上のフェルマー5次超局面の場合にはジンガーによって証明された．また，種数1の場合に，ミラー対称なB型で計算されるBCOVトーションについての予想は吉川謙一らによって証明された．種数が2以上のときの予想は証明されていない．

筆者らの1993年の論文では，トポロジカルな弦理論の分配関数が超弦理論のある種の散乱振幅を与えることも示された．しかし，そのような振幅がどのような意味を持つのかはわからなかった．筆者は，その後10年の間トポロジカルな弦理論の物理的な応用を探求し，2004年のストロミンジャーとバッファとの共同研究で，トポロジカルな弦理論の分配関数が**ブラックホールのエントロピー**を与えることを示した．この記事ではこの発展について解説するスペースがないので，興味のある読者は日本語の解説記事[7]をご覧いただきたい．

トポロジカルな弦理論の一般の数学者向けの解説（数学専攻の学部最終学年から大学院初級のレベル）としては，筆者が日本数学会で行った「高木レクチャー」の記録[8]がある．この分野についてより専門的に勉強するためには，文献9)がよい教科書である．

1995年のポルチンスキーによる**Dブレーン**構成法の発見は，ゲージ理論の研究と超弦理論の研究を深く結びつけることになった．特に，1998年

にマルダセナによって予想された**AdS/CFT**対応は，ゲージ理論の計算――経路積分が有限次元に帰着しない場合も含む――が，すべて10次元の超弦理論の計算に翻訳できることを主張している．この対応によって，ゲージ理論では直接計算することが困難な強結合の問題の多くが10次元の幾何学的問題として理解され，また逆に量子重力の深遠な問題，例えばブラックホールの情報問題，にゲージ理論からの光が当てられた．この10年の発展から，ゲージ理論と超弦理論は独立に存在するのではなく，この2つを止揚した新しい枠組みの中に位置づけられるのではないかという期待が高まっている．

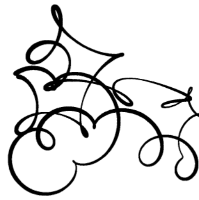
幾何学はゲージ理論や超弦理論の研究に重要な手法を提供してきた．その一方で，自然界の基本法則を探究する物理学者の研究は数学の新しい進展を促している．場の量子論や超弦理論の数学的な定式化が達成されれば，この実り多い交流がさらに深まることになるであろう．

注および参考文献

1) R. デカルト：『幾何学』，デカルト著作集 I（白水社，2001年：原典1637年）．
2) 重力波の非線形解の見かけの特異性をめぐるエピソードについては，D. ケネフィック（小玉英雄訳）：「アインシュタインと『フィジカルレビュー』誌の確執」，パリティ 2006年5月号．
3) 大栗博司：「くりこみ可能性の判定条件」，数学書房刊『この定理が美しい』に収載．
4) ヤン–ミルズ問題の正確な定式化については，クレイ数学研究所のウェッブサイト：http://www.claymath.org/millennium/Yang-Mills_Theory/yangmills.pdf を参照．
5) F. Dyson: "Missed Opportunities", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **78** (1972) 635.
6) L.D. Faddeev and V.N. Popov: *Phys. Lett.* **25B** (1967) 29; *Math. Phys.* **10** (1970) 1.
7) 大栗博司：「トポロジカルな弦理論とその応用」，日本物理学会誌，第**60**巻 (2005) 850.
8) 大栗博司："Geometry as seen by String Theory"，第4回高木レクチャー 2008年6月21日，*Japanese Journal of Mathematics* に掲載予定．
9) 堀健太郎，他：Mirror Symmetry，クレイ数学研究所モノグラフ，第1巻（アメリカ数学会，2003）．

（おおぐり・ひろし，
カリフォルニア工科大学，東京大学数物連携宇宙研究機構）

結び目とソフトマター



出口 哲生

1. はじめに

1.1 ソフトマター：柔らかな物質

ソフトマター（soft matter）とは，高分子や液晶など柔らかな物質の総称である．高分子や液晶は身近な物質である．プラスチックやPETボトルなどは高分子で作られ，またほとんどすべての生物の組織は高分子で構成されている．さらに液晶はテレビ，携帯電話やPCのモニターなどで幅広く用いられている．

「ソフトマター」という言葉はもともとは物理学で作られた専門用語であった．結晶や金属など固体の物質に対置するものとして，ノーベル賞受賞者のド・ジャン（de Gennes）によって90年代に提唱された．つまり，金属などのハードマター（hard matter 固い物質）に対するソフトマター（soft matter 柔らかい物質）という見方である．

ここでソフトマターに関連する物質の物理学の歴史を簡単に振り返ってみよう．現代の物理学は，素粒子・原子核の分野と物質の物理的性質を研究する分野の2つに大きく分けられる．そして物質を研究する物理学は，半導体や磁石の研究から次第に発展していった．大雑把に言えば，70年代までは物質の物理学で主に研究されたのは固体の性質であった．半導体も磁石も固体である．一方，高分子やコロイドなど柔らかな物質は化学物理の中で研究され，その歴史は古い．しかしやや古色蒼然としていたと言えるかもしれない．ところが70年代以降，エドワードやド・ジャンによって素粒子の場の理論の見方が高分子の統計力学へ導入され，変革が生じた．特に，統計力学の2次相転移（臨界現象）の理論が応用された．この結果，高分子の排除体積効果（高分子の体積に起因する相互作用）に対する系統的な研究方法が導かれるなど，ソフトマターの様々な現象に出現する非線形性を本格的に取り扱うことが可能となり，物理学として新たな地平を拓くに至ったのである[1,2]．

1.2 高分子の柔らかさと絡み合い

ソフトマターの代表的な物質として，高分子を考えよう．多くの高分子は同じ分子が繰り返し結合して一列に並んだ線状の形状をもつ．このような両端の開いた線状の高分子を線形高分子鎖と呼ぶ．また，繰り返しの単位となる分子をモノマーあるいはセグメントと呼ぶ．

高分子で作られた物質は固体とは異なり，ソフトでやわらかな性質を持つ．例えばゴムは，自動車のタイヤや台所の輪ゴムなど幅広く用いられている．ゴムに力を加えると変形し，力を除くと元へ戻る．これは弾性である．金属も弾性をもつ．しかし，輪ゴムを伸ばすと，大きく引き伸ばしても切れないで元へ戻る．一方，金属をゴムと同じように引き伸ばすことはできず，あえて伸ばそうとすれば切断してしまう．また，高分子には粘性と弾性とを合わせた粘弾性という性質がある．例えば，卵白，ゼリーやプリンなども高分子で作られている．これらに小さな力を短時間加えた後に

力を除くと元に戻る．一方，大きな力を加えるかあるいは長時間加えると，力を除いてもその変形はもとには戻らない．

高分子の示すやわらかな性質は，高分子が細長いひも状の構造を持つことに由来すると考えられている．例えば，卵白やゼリーなどが示す粘弾性は，細長いひも状の分子が互いに絡み合うために出現すると推測されている．これを**絡み合い効果**と呼ぶ．例えばレプテーション理論では，各々の高分子鎖はその周りのチューブ状の領域中を運動すると仮定することにより，高分子のダイナミクスに関して非常に大きな成功を収めた[2)]．しかし，高分子鎖の周りのチューブ状領域の仮定が有効でない場合など，どんな絡み合いに対しても適用できるわけではない．

このように，高分子の微視的なレベルでの絡み合いを理論的に厳密に取り扱うことは，高分子物理学における重要な課題の一つなのである．その一側面として，高分子のトポロジーに関係する絡み合いの効果を考えることができる．後で説明されるように，これを**トポロジー的絡み合い効果**と呼ぶ．本解説の目的は，高分子におけるトポロジー的絡み合い効果の簡単な説明である．

2. 結び目と絡み目

2.1 結び目の定義

トポロジーのイメージを明確にするため，最初に結び目を定義しよう．ひもを結んでその両端をくっつけて閉じたものを**結び目**（knot）と定義する．ここでひもの太さは無視する．すなわち，自分自身と交差しない3次元空間内の閉じた連続曲線を結び目と呼ぶ．

図1の結び目は最も単純なものであり，自明な結び目（trivial knot）と言う．図2の結び目には交点が3個ある．最も簡単な自明でない結び目である．この結び目は3つの葉を持つように見えるので，三葉結び目（trefoil knot）と呼ばれる．図2の2つの三葉結び目は結び目として異なっており，実は互いに鏡像の関係にある．

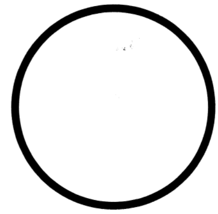


図1　自明な結び目（trivial knot）.

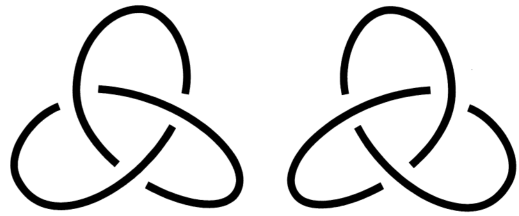


図2　三葉結び目（trefoil knot）.

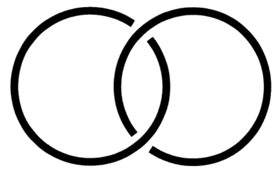


図3　ホップ絡み目（Hopf link）.

3次元空間内の結び目を考え，そのひもの一部分を自分自身と交差しないように連続的に少しずつ移動させた場合，この移動変形後の空間曲線はやはり同じ結び目を表している．2つの閉じた曲線が，ひもを交差させない連続的な変形によって互いに重ねられるとき，その2つの結び目は同じである．ここで，ひもを交差させない連続的変形とは，その途中でひもを切らない連続的な変形のことである．

2.2 絡み目の定義

結び目の定義を拡張して，**絡み目**（link）を定義する．1本のひもが閉じたものを結び目と呼び，2本以上のひもが閉じたものを絡み目と呼ぶ．ただし一般論で必要な場合には，結び目と絡み目を総称して絡み目と呼ぶ．そして，ひもを互いに交差しないような連続的変形によって与えられた2つの絡み目を重ね合わせることができるとき，この2つの絡み目は同じ絡み目であると定義する．

図3の絡み目はホップ絡み目（Hopf link）と呼ばれる．ホップ絡み目は2本のひもが閉じたもの

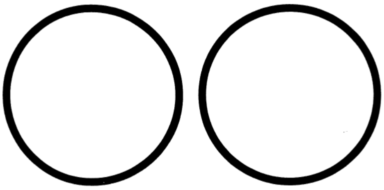


図4　2成分の自明な絡み目（trivial link）.

である．2つのひもはどれも自明な結び目であるが，ひもを切断することなく分離することはできない．図4は2本のひもでつくられた自明な絡み目を表す．

2.3 トポロジー不変量

結び目や絡み目の性質を調べるには，不変量を用いると便利である．一般に**トポロジー不変量**とは，2つの対象が同じトポロジーを持つ場合，そのどちらにも同じ値を与える数学的量のことである．

不変量の例として，2成分の絡み目に対する絡み数（linking number）を定義する．直観的には，絡み数は一方の成分の周りに他方の成分が絡む回数を表す．

結び目や絡み目の曲線に向き与えたものを，それぞれ有向結び目および有向絡み目と呼ぶ．有向絡み目のダイアグラム（絡み目を表す図）には2種類の交点がある．どの交点にも2つの線分が対応する．交点で上を通る線分に着目すると，これに対してもう一方の下を通る線分が右から左へ通過するか，あるいは左から右へ通過するかの2通りがある．前者をプラスの交点，後者をマイナスの交点と呼ぶ（図5参照）．そしてこのプラスやマイナスを，交点の符号と呼ぶ．記号を用いると，交点 C に対してその符号を $\epsilon(C)$ と表す．

絡み数の定義を与えよう．2成分の有向絡み目 L を考える．各成分の結び目を K_1 および K_2 と表そう．そして K_1 の辺と K_2 の辺が交差して作

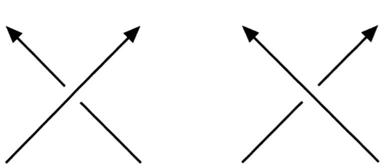


図5　正符号の交点（左図）；負符号の交点（右図）.

られる交点の集合 $S(K_1, K_2)$ を考える．絡み目 L の絡み数 $lk(L)$ は，すべての交点に対する交点の符号の和として定義される．

$$lk(L) = \frac{1}{2} \sum_{C \in S(K_1, K_2)} \epsilon(C). \qquad (1)$$

実際，絡み数はトポロジー不変量である．

3. トポロジー的絡み合い効果

細長くひも状の高分子鎖は，様々な配置すなわち空間形状を取り得る．例えば，溶液中の高分子鎖の瞬間の形態は**ランダムウォーク**で表現される．すなわち，ある時刻の高分子鎖の空間配置は，ランダムウォークの軌跡に対応する．

具体例として**環状高分子**を考えよう．環状高分子とは，両末端が閉じた高分子鎖である．熱揺らぎの中で高分子鎖は切断されず，そのトポロジーは一定である．そして環状高分子のトポロジーは結び目で表される．例えば図1のような自明な結び目のトポロジーをもつ環状高分子が存在する．

環状高分子を，原点から出発して原点に戻ってくるような閉じたランダムウォークと見なすことができる．あるいはランダムな配置のポリゴン（多角形）と見なすと**ランダムポリゴン**で表すことができる．ランダムポリゴンあるいは閉じたランダムウォークとしては，すべてのトポロジーのものが出現する．すなわち，様々な結び目に対してランダムポリゴンが存在する．しかし，現実の環状高分子のトポロジーは一定であるので，実際にはその中の一つのトポロジーの閉じたランダムウォークしか出現しない．この結果，実際に実現する環状高分子の配置数は閉じたランダムウォークの場合よりもずっと減少するのである．例えば，自明な結び目のトポロジーを持つ環状高分子が溶液中に存在する場合，熱揺らぎのために様々な形状を取るが，しかし，トポロジーが三葉結び目と同じである配置は決して出現しない．

トポロジー一定の条件のために高分子鎖の配置（空間的形状）は一般に大きく制限される．この結

果生じる効果を，トポロジー的絡み合い効果と呼ぶ．トポロジー一定の条件を課すと，平衡状態であっても出現する状態は限定される．このため，トポロジーの条件を課すと，統計力学的平均値が一般に変化する．

トポロジーを固定する結果，高分子の物理量に変化が生じる例として，高分子の平均の広がり（慣性半径の二乗平均値）を考える．同じ長さの環状高分子鎖を比べたとき，複雑な結び目を持つ配置のほうがその平均サイズは小さいと予想される．例えば自明な結び目と三葉結び目の場合，三葉結び目のほうがその空間曲線が複雑な構造になり，その分平均サイズは小さいはずある．実際この予想は数値シミュレーションによって確認されている[3]．

トポロジー的絡み合いの研究は，歴史的には1960年代初め頃にはじまった．例えば，デルブリュックによってDNA 2重らせんの複製の際に2重らせんの絡み合いが障害になることが指摘された．また，フリッシュとバッサーマンによって，非常に長いランダムウォークは必ず結び目を作るのではないか，という予想が与えられた．S.F. エドワーズは高分子の形状をランダムウォークで表し，さらにトポロジーの効果を研究している[2]．これらのパイオニア的な研究の後，数値シミュレーションや自己排除的酔歩 (Self-avoiding walks, SAW) の数学的理論の応用研究などにより，環状高分子のトポロジー的絡み合い効果の統計力学的理論が次第に構築されてきた[4]．

4. ランダム絡み目と高分子

トポロジー的絡み合い効果の具体例として，2個のランダムポリゴンを3次元空間中に発生させたときに絡み目が生じる確率を考えてみよう．これは環状高分子の溶液の性質と関係する．簡単のため，自明な結び目の環状高分子が互いに絡み合わないように合成されたと仮定する．このとき，環状高分子のランダムな配置の中で互いに絡み合わない配置のみ出現する．このトポロジー的な拘束条件から，エントロピー的な相互作用が導かれる．そしてこの結果，浸透圧などの実験値は線形高分子の場合と異なるのである．

4.1 絡み目確率

ランダムポリゴンを同時に2個作ったとき，この2つが絡み合う確率を議論しよう．頂点数 N で自明な結び目 $K_1 = 0$ をもつランダムポリゴンと，頂点数 N で自明な結び目 $K_2 = 0$ をもつランダムポリゴンを生成させ，その重心どうしが距離 R だけ離れるように置く．このとき，2つのランダムポリゴン全体で絡み目 $L(0,0)$ をつくる確率を記号 $P_{L(0,0)}(R;N)$ で表し，**絡み目 L の生成確率**，と呼ぶ．ただし，絡み目 $L(0,0)$ は2つの自明な結び目に対する絡み目であることを示す．

以後，距離をランダムポリゴンの平均の大きさ（慣性半径）R_g で規格化し，規格化された距離 $r = R/R_g$ を導入する．この状況における絡み目生成確率を，$P_{L(0,0)}(r;N)$ と表そう．

絡み目不変量を用いた数値シミュレーションにより，絡み目確率を求めることができる[5,6]．まず頂点数 N のランダムポリゴンを非常に多数生成し，不変量を計算してポリゴンのトポロジーを判定することにより，その中から自明な結び目のものだけを選び出す．そして集合 Σ_1 とする．同様に，頂点数 N で自明な結び目のランダムポリゴンの2番目の集合 Σ_2 を用意する．Σ_1 と Σ_2 の中からそれぞれ1個のポリゴンを任意に選び出し，これらを重心間隔 r の位置にランダムに置く．そして絡み目不変量を計算してそのポリゴンのトポロジーを判定する．この試行を繰り返し行い，そのうちの何回で絡み目 L ができるかを調べると，絡み目生成確率 $P_{L(0,0)}(r;N)$ を数値的に求めることができる．

図6は2つの頂点数 N で自明な結び目型をもつランダムポリゴンが重心間距離 R となるように位置し，自明な絡み目を作る場合を表している．この状況に対応する絡み目確率は，記号 $P_{0_1^2(0,0)}(r;N)$ で表される．2つの自明な結び目のランダムポリゴンがホップ絡み目を作る場合には，絡み目確率は記号 $P_{2_1^2(0,0)}(r;N)$ で表される．

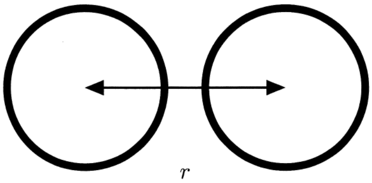


図6　重心間距離 r の2つのランダムポリゴン：自明な絡み目（0^2）の場合．

4.2 絡み目確率の近似式の導出

絡み目生成確率の距離依存性を説明する近似式を，物理的議論によって導くことができる[6]．これを紹介しよう．以下，距離はすべて規格化された変数 r で表す．簡単のため，自明な絡み目の絡み目確率 $P_{0_1^2(0,0)}(N;r)$ を $P_0(r)$ と表す．

重心間距離 r の2つのポリゴンが自明な絡み目（絡まない）を形成していたとする．このとき，重心間距離を dr だけ増加させても，2つのポリゴンは自明な絡み目（絡み合いなし）のままであろう（仮定1）．一方，重心間距離 r の2つのポリゴンが非自明な絡み目（絡み合いあり）であったとする．このとき重心間距離を dr だけ増加させるとある割合で非自明な絡み目（絡み合いなし）に変化するであろう（仮定2）．そして，重心間距離が r であるように2つのポリゴンの配置する可能な場合の数は半径 r の球面積 $4\pi r^2$ に比例する．また，自明な絡み目の増加する割合 $dP_0(r)$ は，重心間隔の増分 dr が微小であるときはこれに比例するであろう．さらに，非自明な絡み目である確率は $1-P_0(r)$ である．最後に未知の比例定数 C を仮定して，次のような近似的関係式が導かれる．

$$dP_0(r) = C\,(1-P_0(r))\,4\pi r^2 dr. \qquad (2)$$

この微分方程式を積分すると，次式が導かれる．

$$P_0(r) = 1 - A\exp(-\alpha r^3). \qquad (3)$$

ただし，ここで $\alpha = 4\pi C/3$ である．

4.3 トポロジー的相互作用

トポロジー的な構造を持つ高分子の性質を議論する上で，トポロジーが保存されるために生じるエントロピー的相互作用は重要である．トポロジー的なエントロピー相互作用とは，分子運動によってトポロジー状態が変化できないことによって実現可能な配位空間が制限されるために生じる．すなわち，トポロジー的絡み合い効果の一つである．統計力学的には，エントロピー的な力に相当する．トポロジー保存の条件から生じる力を“**トポロジー的エントロピー力**”と呼ぶ．

前節で導いた関数を用いると，シータ溶媒中の2つの環状高分子の間のエントロピー力が解析的に表される．ここでシータ溶媒とは，高分子の体積の効果を無視できるような溶液のことである．重心間距離 R の2つの互いに絡み合っていない環状高分子の間のエントロピー斥力を，$f(R)$ と表そう．ここでどちらの環状高分子鎖も自明な結び目のトポロジーをもつと仮定する．すなわち，$K_1 = K_2 = 0$ の場合である．2つの環状高分子鎖が自明な絡み目を作る場合のエントロピーを $S_0(R)$ と表すと，エントロピー力は次式で定義される．

$$f(R) = T\frac{d}{dR}S_0(R). \qquad (4)$$

ここで，自明な絡み目を作る2つの環状高分子鎖対のエントロピーは，自明な絡み目の確率 $P_0(r)$ を用いて，次のように表される．

$$S_0 = k_B \log P_0(r). \qquad (5)$$

ここで k_B はボルツマン定数である．よって，2つの互いに絡み合っていない環状高分子の間のエントロピー斥力は，次のように求められる[6,7]．

$$f(r) = \frac{3k_BT}{R_g}\,\frac{\alpha A r^2 \exp(-\alpha r^3)}{1 - A\exp(-\alpha r^3)}. \qquad (6)$$

このようにして求めたトポロジー力は，実際の系で測定することができる．環状ポリスチレンをシクロヘキサン溶媒に溶かすと，線状の高分子よりもトポロジー力が働くため浸透圧が上昇し，その実験結果からトポロジー効果を求めることができる．現在，理論と実験は良く対応していると考えられている．

5. 高分子のトポロジーに関する様々な研究

広い意味で高分子のトポロジーに関する研究が，最近次第に発展して来ている．まず，結び目の数学はこの十数年間に著しく進歩し，例えば新しいトポロジー不変量が多数発見された[8]．これらを高分子に応用して数値シミュレーション研究が進められている[4,6]．環状高分子のトポロジーに関して最もよく研究されてきたのは，DNA においてである[9]．大腸菌のプラスミドの DNA など，原始的な生物の DNA は環状に閉じたものが多い．そして，環状の DNA から様々な結び目をもつ DNA が導かれている．これらの結び目 DNA はゲル電気泳動で分離可能である．DNA のトポロジーは，DNA の複製メカニズムを理解する上で重要であり，研究成果の蓄積も厚い．

最近，幅広く様々な分野で高分子のトポロジーに関する実験による研究が発展している．例えば，環状の DNA の拡散が実時間観測の手法などにより実験で詳細に調べられている[10,11]．また従来，環状の高分子を合成することは実験技術的に非常に困難であったが[12]，分子量が大きくかつ分散も小さく，さらに高純度の環状高分子鎖が合成された[13]．この結果，トポロジー的絡み合い効果の理論的予言が実験で検証されるのではないか，という興味深い研究状況が生じている．さらには，タンパク質でも結び目の構造が見出され[14]，折れたたみ過程を特徴づけられるかどうか，議論されている[15]．

最後になるが，トポロジー的絡み合い効果の理論的研究は，2 次相転移の繰り込み群の理論と結び目などトポロジーの数学を基盤として，数値シミュレーションを駆使して研究されている．さらに，物理学だけでなく数学や化学さらには生物などすべての分野とも関係する．そしてその研究成果は DNA など生物や医学への応用，また高分子工学などにも深く関わり，将来，幅広く応用される可能性がある．一言でいえば，物理学の理論と数学が自然科学全般に応用される可能性のある分野なのである．

このように，トポロジー的絡み合い効果は理論と実験の両面から，現在，大変興味深い研究課題となっている．今後の発展にも期待したいと思う．

参考文献

1) P.G. de Gennes, *Scaling Concepts in Polymers*; ド・ジャン著，久保亮五監修：『高分子の物理学—スケーリングを中心にして』，吉岡書店 (1984).
2) M. Doi and S.F. Edwards, *The Theory of Polymer Dynamics* (Oxford University Press, 1986).
3) M.K. Shimamura and T. Deguchi, *Phys. Rev. E* **65**, 051802 (2002) (9 pages).
4) E. Orlandini and S.G. Whittington, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 611 (2007).
5) A.V. Vologodskii, A.V. Lukashin, M.D. Frank-Kamenetskii, V.V. Anshelevich, *Sov. Phys. JETP* **39**, 1059 (1974).
6) T. Deguchi and K. Tsurusaki, in *Lectures at Knots '96*, edited by S. Suzuki, (World Scientific, Singapore, 1997) pp.95–122.
7) T. Deguchi, in *Physical and Numerical Models in Knot Theory* eds. J.A. Calvo *et al.*, p.343 (World Scientific, Singapore, 2005).
8) 河内明夫編著『結び目理論』（シュプリンガー・ジャパン，1990）.
9) A.B. Bates and A. Maxwell, *DNA Topology* (Oxford University Press, 2005).
10) R.M. Robertson, S. Laib and D.E. Smith, *Proceedings of the National Academy of Science* **103**, 7310 (2006).
11) S. Araki, T. Nakai, K. Hizume, K. Takeyasu and K. Yoshikawa, *Chem. Phys. Lett.* **418**, 255 (2006).
12) C.W. Bielawski, D. Benitez and R.H. Grubbs, *Science* **297**, 2041 (2002).
13) D. Cho, K. Masuoka, K. Koguchi, T. Asari, D. Kawaguchi, A. Takano and Y. Matsushita, *Polymer Journal* **37**, 506 (2005).
14) W.R. Taylor, *Nature*, **406**, 916 (2000).
15) J.I. Sulkowska, P. Sulkowski, P. Szymczak and M. Cieplak, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 058106 (2008).

（でぐち・てつお，お茶の水女子大学理学部）

対称性と結晶



山下　靖

1. はじめに

物質を構成する原子，イオンまたは分子などが規則正しく配列し対称性をもっている固体が結晶である．身近なところでは，食塩，砂糖，ダイヤモンド，水晶，ドライアイス，氷，様々な金属などが結晶の例で，多くの物質が結晶の形で存在していることがわかる．理科の実験でミョウバンなどの結晶を作り，その幾何学的な形を眺めたことのある読者も多いことであろう．

何かの物質を結晶にすることができると，X 線結晶構造解析という方法によりその原子や分子の 3 次元構造を調べることができる．これまで報告されている結晶構造は，無機物だけでも 14 万種類を超えている[1]そうで，このような構造を決定したり分類したりするための鍵となるのが対称性である．結晶を研究する際には，原子などがとり得る 3 次元空間内の対称的な配置を幾何学的にすべて調べ上げておくことが必要で，幾何学が結晶学において使われることになる．3 次元空間内の結晶構造は，7 種の結晶系，14 種のブラベー格子，32 種の点群，230 種の空間群として記述される．本稿の前半ではこれら 3 次元空間の対称性に関する古典的な話題を紹介する．

最後の節では少し話題を変えて，結晶構造の対称性と等方性という観点からなされた砂田利一氏による研究に触れ，現代数学がいかに使われているかについて考えてみたい．

2. 壁紙群

物理的に存在する結晶は 3 次元のものであるが，いきなり 3 次元について考えるのは大変なので，準備として 2 次元の場合から始めてみよう．

平面上に 1 種類とは限らない原子が規則的に並んでいるとして，それが持つ対称性を分類したい．もう少し考えやすくしたければ，壁紙に規則的に並んだ模様を作成するときに得られる対称性の分類と思っても構わない．実際この節の題名にあるように 2 次元の場合は**壁紙群**という名前がついている．ここで「規則的」とは 2 次元分の平行移動による対称性を持つという条件で，この 2 次元格子 T を与えるベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とする．

この 2 つを 2 辺とする平行四辺形は T の格子点を平均で 1 つ含み，プリミティブ単位胞と呼ばれる．1 つのプリミティブ単位胞に含まれる原子などの集まりを，その結晶構造の基底と呼ぶ．壁紙で言えば上の模様に当たり，基底に含まれる原子の数は 1 つとは限らず，高分子による結晶の場合は数万の場合もある．

2 次元格子について，まずは基底（または模様）のことはしばらく忘れて，格子自身の対称性を考えよう．適当な格子を不変にすることができる対称操作には以下のものがある．

- **並進操作**：平面上の平行移動のことである．
- **回転操作**：ある点を中心とする適当な角度の回転である．

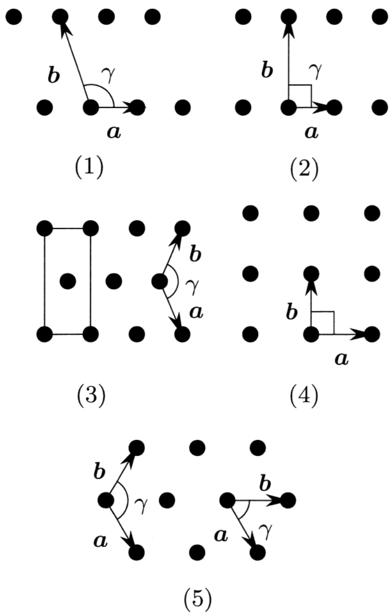


図 1　2 次元ブラベー格子.

● **鏡映操作**：ある線分に関する線対称である.

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ それぞれの長さを a, b とし，そのなす角を γ とする．これらを変化させたときに，格子 T を不変にする対称操作により 2 次元の格子を分類すると，以下のようになる（図 1 参照).

(1)　平行四辺形：$a \neq b$，$\gamma \neq \pi/2$,

(2)　長方形：$a \neq b$，$\gamma = \pi/2$,

(3)　菱形：$a = b$，$\gamma \neq \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$,

(4)　正方形：$a = b$，$\gamma = \pi/2$,

(5)　6 方形：$a = b$，$\gamma = \pi/3$ または $2\pi/3$.

(1) は最も一般的な場合で，格子がもつ対称性としては $s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$（$s, t$ は半整数）上の 180 度の回転操作のみである．(2) ではさらに直線 $t\boldsymbol{a}$，$t\boldsymbol{b}$，$t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}/2$，$t\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}/2$（$t$ は実数（パラメータ表示））などによる鏡映操作でも不変となる．(3) は，(2) の格子の中心に点を加えたものとみなすことができる．(3) において (2) の長方形に当たるのが (3) の図の左側の長方形である．この長方形は格子点を平均で 2 つ含むのでプリミティブ単位胞ではないが，格子点を結んで得られ，平行移動により結晶構造を再現するので，単位胞と呼ぶ．(3) はこの長方形の単位胞から来る (2) の対称性に加えて，$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})/4$ などを中心とする 180 度の回転操作で不変となる．(4) ではさらに対称性が高くなり，格子点は 90 度の回転操作で不変になるとともに，直線 $t(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ など対角線方向の直線についての鏡映操作でも不変となる．(5) は，格子点上での 60 度の回転操作，格子による正 3 角形の中心点における 120 度の回転操作，その他多くの点での 180 度の回転操作や多くの軸での鏡映操作が可能であることが観察できるであろう．この 5 つを 2 次元**ブラベー格子**と呼ぶ.

それぞれの格子点における点対称の種類で格子を分類するのが**結晶系**で，(2) と (3) は等しくなるがそれ以外はすべて異なることが分かり，2 次元においては 4 つの結晶系が存在することになる.

1 つの点を固定するような対称操作による群は**点群**と呼ばれる．上で見たようにブラベー格子が許容し得る回転対称操作は 180 度，120 度，90 度および 60 度であり，さらに鏡映操作も許容することがあった．このことから，ブラベー格子と両立するような点群の種類は，10 種類しか存在しないことが分かる.

ここまで，基底（または模様）のことをずっと忘れて格子自身の対称性を見てきたが，最後に基底のことを思い出すことにする．同じブラベー格子を持つ結晶であっても，1 つの格子内のパターンである基底の配置によって，結晶構造全体を不変にする変換群は，ブラベー格子の対称性よりも小さなものになる可能性がある．例えば平行四辺形の格子自体は格子点で 180 度の回転操作が可能であるが，平行四辺形内に対称性のない模様が書いてあると，それらは格子点での 180 度の回転操作で重なってくれない．これらのことを考えに入れて壁紙群が分類される.

大雑把に言うと壁紙群は点群と並進操作の群（$\mathbb{Z}^2$）の組合せで得られるが，少し注意が必要である．並進操作を行ったあとその並進のベクトルに関する鏡映操作を行う操作を映進操作と言うが，壁紙群の中には映進操作は要素として持つがその定義に利用した並進操作や鏡映操作は群の要素として含まないものもある．これらの組合せをすべて考えることにより，2 次元の対称性（壁紙群）に

は17種類のものが存在することが知られている. J. ウィークス氏によるソフトウェア「カーリー」[4]を用いると, 簡単に17種類の空間群に基づいた壁紙模様を描くことができる. ソフトウェアの宣伝文句を信じると, 使い方を読む必要もなく誰が描いても必ず傑作ができる素晴らしいソフトウェアである.

3. 結晶の対称性

2次元においては4つの結晶系, 5つのブラベー格子, 10の点群, 17の空間群が存在することを見たが, 3次元の場合では, 7つの結晶系, 14のブラベー格子, 32の点群, 230の空間群が存在することが知られている. ここですべての詳細を述べることはできないが, 結晶系ごとにブラベー格子を順に見てみたい.

3.1 結晶系とブラベー格子

2次元のときと同様に, 基本ベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ とし, それぞれの長さを a, b, c と書くことにする. またこれらの間の角度を $\alpha = \angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, $\beta = \angle(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$, $\gamma = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ とする. 7つの結晶系は以下のようになっている.

- 3斜晶系 : $a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a,\ \alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha.$
- 単斜晶系 : $a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a,\ \alpha = \beta = \pi/2 \neq \gamma.$
- 斜方晶系 : $a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a,\ \alpha = \beta = \gamma = \pi/2.$
- 正方晶系 : $a = b \neq c,\ \alpha = \beta = \gamma = \pi/2.$
- 3方晶系 : $a = b = c,\ \alpha = \beta = \gamma \neq \pi/2.$
- 6方晶系 : $a = c \neq b,\ \alpha = \gamma = \pi/2, \beta = 2\pi/3.$
- 立方晶系 : $a = b = c,\ \alpha = \beta = \gamma = \pi/2.$

これらは単純格子と呼ばれる. 単純格子から以下のような基本ベクトルを持つ複合格子を作ることができる.

- A 格子 : $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/2\}.$
- B 格子 : $\{(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})/2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}.$
- C 格子 : $\{\boldsymbol{a}, (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/2, \boldsymbol{c}\}.$
- I 格子 : $\{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}.$

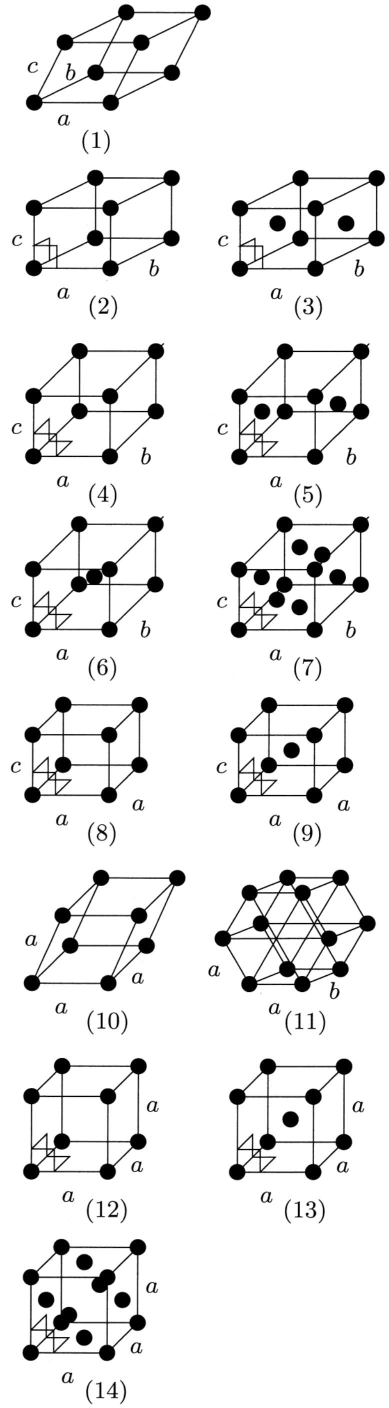


図2 3次元ブラベー格子.

- F 格子 : $\{(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})/2, (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/2, (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/2\}.$

また, A 格子, B 格子, C 格子を側心格子, I 格子を体心格子, F 格子を面心格子と呼ぶ. 単純格

子と複合格子を合わせて，14 のブラベー格子は以下が存在する．番号は図 2 の中の番号に対応している．

(1) 3 斜格子，
(2) 単純単斜格子，
(3) 側心単斜格子，
(4) 単純斜方格子，
(5) 側心斜方格子，
(6) 体心斜方格子，
(7) 面心斜方格子，
(8) 単純正方格子，
(9) 体心正方格子，
(10) 3 方格子，
(11) 6 方格子，
(12) 単純立方格子，
(13) 体心立方格子，
(14) 面心立方格子．

図では側心格子として A 格子を描いている．7 晶系と単純，側心，体心，面心の 4 種の組合せからは $7 \times 4 = 28$ 通りのブラベー格子が出てきそうであるが，そうはなっていない．これは，体心単斜格子とか面心正方格子などはすでにある他の格子で得られるためである．どうやったらそれが得られるか，考えてみてほしい．

3.2 点群

点群とは，格子の対称性を与える操作の中で，空間内のある点を固定するようなものであった．点群を生成する点対称操作として，以下のものが必要になる．

- **回転操作**：固定される点を通過する軸の周りに $2\pi/X$ 回転する操作を X 回の回転操作と言う．記号：X（この軸に直交して鏡映面があるときの記号は X/m.）
- **鏡映操作**：固定される点を含む鏡映面による面対称の操作である．記号：m
- **反転操作**：原点を中心に点対称の位置に移動する操作である．記号：$\overline{1}$
- **回反操作**：X 回回転の後に反転を行う操作である．記号：$\overline{X}$

上のシンボルを利用して生成元を並べることで 32 種の点群を表記する．生成元の数は高々 3 である．

- 3 斜晶系：1，$\overline{1}$.
- 単斜晶系：2，$\overline{2}$.
- 斜方晶系：222，$2mm$，$2/m\,2/m\,2/m$.
- 正方晶系：4，$\overline{4}$，$4/m$，422，$4mm$，$\overline{4}2m$，$4/m\,2/m\,2/m$.
- 3 方晶系：3，$\overline{3}$，32，$3m$，$\overline{3}m$，$\overline{3}\,2/m$.
- 6 方晶系：6，$\overline{6}$，$6/m$，622，$6mm$，$\overline{6}2m$，$6/m\,2/m\,2/m$.
- 立方晶系：23，$2/m\overline{3}$，432，$\overline{4}3m$，$4/m\,\overline{3}\,2/m$.

群を正確に記述するためには回転軸や鏡映面などの位置関係も説明すべきであるが，詳細は省略する．いくつかの例に関して簡単に説明する．

- $X22$：X 回回転軸に直交して 2 回回転軸が存在する場合．このとき 3 方晶系を除き自動的にもう一つの 2 回回転軸が生じる．
- Xmm：X 回回転軸に直交して鏡映面が存在する場合．このとき自動的にもう一つの鏡映面が生じる．
- $\overline{X}2m$：X 回回反軸に直交して 2 回回転軸が存在する場合．このとき自動的にもう一つの鏡映面が生じる．
- $X/m\,2/m\,2/m$：$X22$ に反転も加わった場合．

3.3 空間群

さて，いよいよ空間群である．2 次元と同様に大雑把には，14 のブラベー格子と 32 の点群を組み合わせて空間群を構成することになる．ただし 2 次元のときにも映進操作があったように，点群の対称操作 S に並進対称操作 T を加えた操作 TS を対称操作として許容しつつ，S や T は結晶の対称性を保存しないということがあり得る．そのような部分的並進操作を伴う対称操作には以下のものがある．

- **らせん操作**：部分的並進操作に回転操作を行うもの．
- **グライド操作**：部分的並進操作に鏡映操作を行うもの．これにはさらに細かく 3 種類ある．
  - **軸グライド**：$\boldsymbol{a}/2$ または $\boldsymbol{b}/2$ または $\boldsymbol{c}/2$ だけ並進してからその軸を含む鏡映面に関して鏡映操作を行うもの．

○ **対角グライド**：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/2$ または $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/2$ または $(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})/2$ だけ並進してからその軸を含む鏡映面に関して鏡映操作を行うもの．（立方晶と正方晶では $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/2$ も可能）

○ **ダイアモンドグライド**：立方晶と正方晶または直方晶の複合格子について $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/4$, $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/4$, $(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})/4$ または $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/4$ の並進操作の後に鏡映を行うものである．

これらを組み合わせてできるのが空間群である．ここでは各晶系ごとにどれだけの数があるのかのみを述べておく．

- 3 斜晶系：2 種．
- 単斜晶系：13 種．
- 斜方晶系：58 種．
- 正方晶系：68 種．
- 3 方晶系：25 種．
- 6 方晶系：27 種．
- 立方晶系：36 種．

230 種の空間群が具体的にどのような生成系を持ち，どのような対称操作で不変になるのか，またその対称操作の回転軸や鏡映面の座標がどうなっているのかなどの具体的なリファレンスとして，世界中の科学者が未知の物質の結晶構造を決定するための拠り所となるのが International Tables for Crystallography[5) である．

3.4 X 線結晶構造解析

X 線を物質に当てると，そのまま通過するものもあるが一部は吸収されたり散乱されたりする．X 線の波としての性質から，ある特定の向きにだけ X 線が強くなったり弱くなったりすることがあり，これが回折である．特に結晶は原子や分子が規則的に並んでいるため回折像は多数の斑点として現れる．これら斑点の位置や強さを結晶を回転させながら観測し，そのデータから物質の 3 次元構造を知る手法が X 線結晶構造解析である．ここでデータから 3 次元構造を導く際に空間群のデータが必須の知識として利用されている．

3.5 歴史

最後に空間群に関する歴史ついて簡単に触れておくことにしよう．

結晶に関する研究の歴史は古く，32 の点群は 1830 年に J. ハッセルによって計算された．その後，14 種の格子の分類は A. ブラベーによって 1850 年に行われている．230 の空間群の分類は E.S. フェドロフと A.M. シェンフリースによって 1885 年から 1891 年にかけてまとめられた．また独立に W. バーローも 1894 年空間群を分類した．

ちょうどその翌年の 1895 年にレントゲンが X 線を発見し，その後 X 線結晶構造解析につながっていくことになる．

4. K_4 結晶

ここまで，結晶構造を分類するために使われる数学として，3 次元空間の対称性の紹介をしてきた．ただし前節の最後で述べたように，数学的にはこれらは 19 世紀末に一応の完成を見た古典的な数学である．現代の幾何学と結晶学はもうあまり関係はないのだろうか．

筆者はこのようなことに関して高い見地から述べることはできないが，アメリカ数学会の雑誌『Notices』の 2008 年 2 月号に掲載された砂田利一氏の論説[6)]を，ごく簡単に紹介したい．（なおこの節を書くに当たって小谷元子氏による紹介記事[7)]も参考にさせて頂いた．）

前節までは，3 次元分の並進対称性を持つ点配置のみを考えていたが，本節では，同様の対称性を持つように空間内に実現された無限グラフを考えることにする．これをその並進対称性で割ると抽象的な有限グラフが得られる．正の整数 d に対して以下の定義をする．

定義 1　グラフがある有限グラフのアーベル被覆になっていてその被覆変換群が $\mathbb{Z}^d$ と同型のとき，d 次元結晶格子と呼ぶ．

例えば，6 角形格子は図 3 の (a) の $\mathbb{Z}^2$ 被覆であり，ダイヤモンド格子は (b) の $\mathbb{Z}^3$ 被覆である．ここで定義した d 次元結晶格子は抽象的なグラフであるが，それを d 次元空間内にうまく対称性が高くなるように実現するものとして，小谷–砂田[8)]

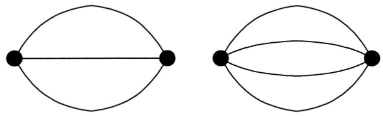


図 3　6 角形格子とダイヤモンド格子の基本有限グラフ．

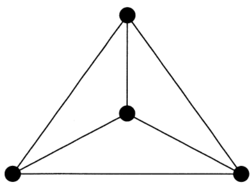


図 4　グラフ K_4．

は標準的実現という概念を定義した．さて，次にグラフの「等方性」を定義する．

定義 2　n 正則グラフ X が強い等方性を持つとは，X の任意の頂点 x, y と $\{1, \ldots, n\}$ の任意の置換 σ に対して，グラフの自己同型 g が存在し，$gx = y$ かつ $ge_i = f_{\sigma_i}$ となることである．ただし，$\{e_1, \ldots, e_n\}$ と $\{f_1, \ldots, f_n\}$ はそれぞれ x, y に隣接する辺である．

強い等方性を持つ結晶格子（無限グラフ）の標準的実現は，対称性と等方性をもった美しいものであろう．このようなものを 2 次元と 3 次元に関してリストアップせよと言うのが問題である．2 次元に関しては正 6 角形格子のみであることが比較的容易に分かる．3 次元においては，ダイヤモンド格子も強い等方性を持つが，3 次元結晶格子でこの性質を持つものはこれだけではないことがわかる．グラフ K_4（図 4）の最大アーベル被覆を K_4 格子と呼ぶことにすると，K_4 格子も強い等方性を持つ．砂田氏は次を示した．

定理 3（砂田）　3 次元結晶格子で強い等方性を持つものは，ダイヤモンド格子と K_4 格子に限る．

K_4 格子の標準的実現がこの節の題名の K_4 結晶である．内藤久資氏による K_4 結晶の画像[6]をぜひ一度ご覧頂きたい．

K_4 結晶の物理的実現はこれまで知られていないようであるが，小谷氏，砂田氏らは材料科学の研究者らと K_4 結晶を実際に作る研究プロジェクトを開始したそうである[7]．ダイヤモンドのように何か著しい物理的性質を持った材料が現代数学を使うことにより生まれてくるとしたら，愉快なことである．

5. おわりに

本稿の前半で取り上げた結晶格子の空間群の話題は，幾何学が分類のための道具として役に立っていた．この基礎の上に様々な物質の構造が調べられる事を考えると，その重要性は明らかであろう．

最後に取り上げた話題も分類をしているが，むしろ対称性および等方性などを持った物質の存在の可能性を予言するものであり，数学の使われ方として一つの理想と言えるだろう．

参考文献

1) 今野豊彦：『物質の対称性と群論』共立出版 (2001).
2) 小野寺嘉孝：『物性物理／物性化学のための群論入門』裳華房 (1996).
3) 藤永茂，成田進：『化学や物理のためのやさしい群論入門』．岩波書店 (2001).
4) J. Weeks: カーリー（モザイク模様を描くソフトウェア）．`http://www.geometrygames.org/`.
5) International Tables of Crystallography Vol.A, ed. by T. Hahn, The International Union of Crystallography, D. Reidel Publishing Company.
6) T. Sunada: Crystals that nature might miss creating. *Notices Amer. Math. Soc.* **55** (2008), no.2, 208–215.
7) 小谷元子：幾何と対称性：ダイヤモンド・ツイン？．数学セミナー．
8) M. Kotani, T. Sunada: Standard realizations of crystal lattices via harmonic maps. *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), no.1, 1–20.

（やました・やすし，奈良女子大学理学部）

ネットワークトポロジーの活用

根上　生也

1. ネットワークからグラフ理論へ

昨今，**ネットワーク**という言葉から連想するものは，やはり世界中に張り巡らされたコンピュータのネットワークのことでしょう．それをインターネットと呼んだり，Webと呼んだり．そして，その構造を図示せよと言われれば，きっと誰でもコンピュータを表す四角を描いて，そこからケーブルが延びているように線を描くことでしょう．

そういうコンピュータどうしの物理的なつながりだけでなく，Webサイトどうしのハイパーリンクによって仮想的なネットワークも作られています．そして，そのネットワークを図示しても同じような図が描かれることになるでしょう．Webサイト自身に形があるわけではないから，それに対応するものは四角でも丸でもよい．最低限，それとわかる点を配置しておけば十分です．

いずれにせよ，ネットワークとは点と線によって表現される図形のことだと解釈できますね．反対に点と線によって表現できるものというイメージで世の中を見渡せば，いろいろなところにネットワークを発見することができます．道路網，バスや列車の路線図，送電線，電気回路，企業内の部門や役職の関係を表す組織図，家系図など．

こんなに随所にネットワークが登場するのであれば，そういうネットワークを扱う数学があってもいいのではないか．でも，学校で習った数学の教科書にネットワークの絵を見たことはないし….

でも，学校で習うことがすべてではありません．そういうあなたの期待に応えてくれる数学もちゃんと存在しています．それが**グラフ理論**です．グラフ理論では点と線で構成された図形のことをネットワークとは呼ばずに，**グラフ**といいます（図1）．そして，点のことを**頂点**，線のことを**辺**と呼びます．

あまり一般の方たちには認知されていないようですが，実は高校数学の「数学基礎」という科目の中でグラフ理論が扱われています．中学・高校と数学の授業では関数のグラフのことをさんざん勉強させられるので，単に「グラフ」と言ってしまうと，誰も点と線からなる図形のことを思い浮かべてくれません．そこで，数学基礎の中ではそれを**離散グラフ**と呼ぶことになっています．

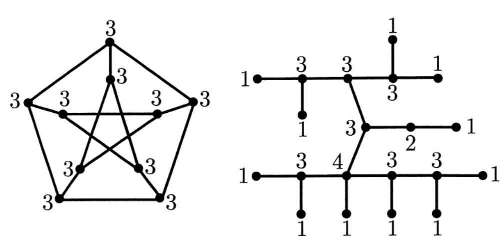


図1　グラフいろいろ．左は専門家の間で一番人気のグラフで，**ペテルセン・グラフ**という名前がついています．右のグラフはLANの構造を表しているようですね．頂点に添えた数字はその頂点から出ている辺の本数（その頂点の**次数**といいます）を示しています．

2. 四色問題

グラフ理論の起源は，あの有名な数学者 L. オイラーが 1736 年に発表したいわゆる**一筆書き定理**に関する論文にまで遡ることができます．それはトポロジーの起源とも重なります．しかし，グラフ理論が世間の目に触れるようになったのは，やはり 1970 年代以降でしょう．

例えば，1976 年にあの有名な**四色問題**が解決されました．それは平面上に描かれた地図はどんなものでも 4 色で色分けできるかという問題です．その地図とは，国や県などの境界線だけを描いた白地図のことだと思ってください．その領域に色を塗っていくのですが，境界線を挟んで接している領域には異なる色を使わなければならない．このルールを守って地図を色分けするには何色あれば十分なのか．19 世紀後半に，4 色あれば十分だろうと予想されて，その予想が正しいことを証明しようと，多くの数学者たちがチャレンジしてきました．それが四色問題です（図 2）．

その四色問題は，米国の数学者アッペルとハーケンによって解決されて，「どんな平面地図も 4 色で色分けできる」という定理となりました．しかし，彼らの証明方法は従来の数学者のセンスからすると受け入れがたいものでした．というのも，彼らはコンピュータを使って何千時間も計算し，その結果として四色定理の証明を与えたのです．なので，その証明の全貌を人間がフォローすることはもはや不可能．そのような証明を数学の証明と呼んでいいのか….

ところで，昨年 10 月に公開された映画「容疑者 X の献身」をご覧になったでしょうか．福山雅治扮する物理学者の湯川教授が事件を解決していくテレビドラマ「探偵ガリレオ」の映画版です．テレビシリーズではたいてい物理学を応用してトリックが暴かれるのですが，この映画では題名が示唆するように数学者が容疑者です．そして，容疑者の石神が湯川との会話の中でこう言っています．

「あの証明は美しくない」

高校教師をしている石神は帰宅すると机に向かって四色問題の研究をしていることになっています．四色問題はすでに解決済みなのですが，数学者の美意識として機械仕掛けの証明には納得がいかず，自力で証明しようとしているのでした．

ちなみに，この映画を最後まで見ていると，エンドロールの中に私の名前が現れます．数学監修として制作に協力したのですが，雑然とした石神の部屋は明らかに私の研究室を模したものです．実際，助監督さんが研究室に訪れ，たくさん写真を撮っていきました．机の足元に紙の手提げ袋があったり，宅配便の箱があったり，教科書会社から送られてきた封筒があったり….

「あの研究室は美しくない」

そんな声が聞こえそうです．

また，石神の研究ノートの中身も私が作りました．専門家しか知らない「Hadwiger 予想」と四色問題の関係をこっそりと書いたのですが，はたして何人の人がその記述に目を止めたでしょうね．

いずれにせよ，白地図の境界線はネットワークのようにも見えるので，四色問題がグラフ理論に属すというのは納得がいくでしょう．でも，見掛けにとらわれてはいけません．というのも，地図の色分けを考える上で，国と国を分ける境界線がどのような形状になっていようと関係がないから

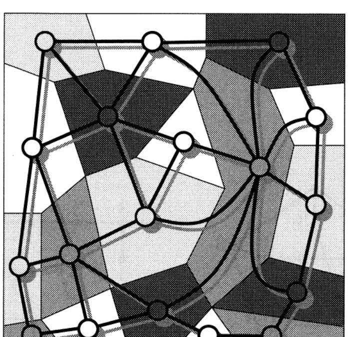


図 2　地図の色分け．境界線を挟んで接する 2 つの領域には異なる色を塗りましょう．点で接している場合は，同じ色でもかまいません．4 色で色分けできるでしょうか？ 領域の隣接関係を表すグラフを考えると，問題がより明確になります．辺で結ばれている頂点は異なる色で塗りましょう．

です．本質的なのは，国と国が接しているのかいないのかという事実だけです．

そこで，国に対応して頂点を用意し，境界線を挟んで接している2つの国に対応している頂点を辺で結びましょう．こうしてできたグラフにおいて，辺で結ばれたものどうしは異なる色にするというルールで，頂点に色を付けていくことを考えましょう．この頂点の彩色問題と地図の色分けを考えることが等価なのは明らかですね．このように無駄な情報をそぎ落としたグラフを考えることで，より明確な議論ができるようになります．

3. コンピュータサイエンスとの共栄

とはいえ，地図の色分け問題なんてパズルのようで，本当に数学なのかと疑う人もいるかもしれませんね．実際，グラフ理論の黎明期にはパズルのような問題を盛んに研究していた人もいました．その場限り的な問題で後の研究につながらないものもあったでしょう．しかし，彩色問題，周遊問題，連結問題，分割問題など，いくつかの基本的な問題は深く研究されて，高級な理論へと変貌していきました．そして，20世紀後半になってコンピュータサイエンスと手を結び，急速な発展を遂げることになります．

例えば，わかりやすい例だと，カーナビの経路探索はグラフ理論の応用です．つまり，道路網をグラフに見立てて，辺を乗り継いで目的地まで行くための経路を探すわけです．グラフ上の最短経路を求める**ダイクストラのアルゴリズム**が基本になっているのだと思いますが，メーカーごとにいろいろな工夫をしていることでしょう．

コンピュータのネットワークが登場する以前にも，物資を効率的に輸送したり，電力を安定供給したりするために道路網や送電線のネットワークが研究されていた時代もありました．しかし，そういうネットワークの研究は役に立っても数学的には高級なわけではありません．そのため，日本の数学者たちに「グラフ理論は陳腐な数学だ」という偏見を植え付けてしまったような気がします．実際，私が学生だった頃にはそういう偏見にさらされながらグラフ理論の研究をしていました．でも，私はそんなことでめげるキャラではないですからね….

いずれにせよ，そういうネットワークで重要なのは，**連結度**という概念です．いろいろな連結度が定義できるのですが，簡単に言うと，どのくらい頂点や辺を除去しても，グラフが連結のままでいられるかということです．例えば，$n-1$個までの頂点を除去しても，グラフが2つの部分に分離しなければ，そのグラフは**n-連結**であるといいます．頂点を辺に置き換えて同じことを考えれば，**n-辺連結**になります．そういうnの最小値を**連結度**，辺で考えた場合には**辺連結度**と呼びます．

要するに，連結度や辺連結度の値が大きいほど，ネットワークの一部が破壊されても，全体としてはつながっているので，生き残っている場所どうしの間では互いに物資や電力の供給が維持可能だということです．頂点数を固定した場合，すべての頂点の組を辺で結んでしまえば，連結度が最大の状態を作れますが，これでは設置する道路やケーブルが多くなりすぎて経済的ではありません．それにそういう状態は平面上では実現できないので，道路網としては不適当です．ではどうすればよいのか？

こう考えていくと，いろいろな研究に発展しそうですね．しかし，こういう工学的な応用を考える場合は，理論的な評価を与えるだけでなく，最適な状態をどうやって見つけ出すかというアルゴリズムの問題が重要になってきます．となると，情報科学的な香が強くなってきて，純粋数学者の趣味からは少し離れてしまいます．

そういえば，2006年8月に旧江戸川に掛かっていた送電線にクレーン船が接触し，東京が停電になってしまうという事故がありました．グラフの連結度について勉強したことのある人なら，そのニュースを聞いて「送電線のネットワークって1-辺連結かい！」とつっこみを入れていたと思います．しかし，送電線が1本切れただけで大ダメージを受けてしまうようなひ弱なシステムを東京電力がありにしているというのは解せない….

そう疑問に思っていたところ，東京電力の技術者と話す機会がありました．彼の話によると，クレーン船が引っ掛けたケーブルは実は 2 本のケーブルになっていたそうです．つまり，送電線のネットワークは少なくとも 2-辺連結になっているわけですね．しかし，ケーブルを同じ場所に配置したのでは意味がないのではと尋ねたところ，やはりクレーン船の事故のようなことは想定していなかったそうです．送電線が切れる主な原因は雷で，雷が同じ場所に落ちる確率は極めて小さい．なので，同じ場所に 2 本のケーブルを配置しているのだそうです．現実の世界では，グラフ理論的な判断だけでなく，いろいろな要素が絡むわけですね．

4. フラーレン

さて，より数学者好みの応用を現実の世界に求めると，それはとてもとても小さなナノサイズ，つまり 10^{-9} の世界にありました．それは炭素原子 60 個で作られたサッカーボールです．つまり，図 3 のように，六角形 20 個，五角形 12 個を対称的に配置した分子構造です．いわゆる**フラーレン**ですね．

この世界最小のサッカーボールを知ったとき，私はこんな特殊な構造は理論上の存在でしかないのだろうと思い込んでいました．ところが，実際は部屋の隅にあるようなすすの中にいくらでもあるのだそうです．しかし，それだけを取り出そうとすると，かなり難しい．なので，純度の高いものを数グラム買うだけでも何万円もするのだそうです．見掛けは炭の粉のようなのだそうです．

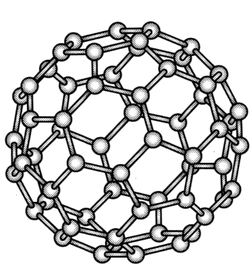


図 3　フラーレン．炭素原子 60 個で作った世界最小のサッカーボールです．六角形が 20 個，五角形が 12 個あります．

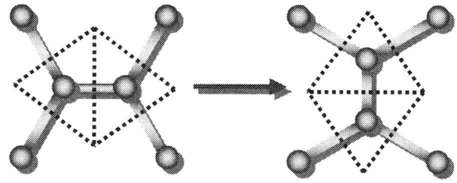


図 4　H 変形と対角変形．隣接する 2 個の炭素の配置を回転するように分子構造を変形するのが H 変形です．一方，破線のほうに注目すると，三角形分割において対角線を切り替える変形になっています．それが対角変形です．

このサッカーボールに限らず，3 本の腕を持った炭素原子を組み合わせて作った構造を**フラーレン**と呼ぶようです．となると，C_{60} と表される分子構造は，サッカーボール以外にも存在することになります．例えば，図 4 のような部分的な変形を考えてみましょう．この変形を繰り返すことによって，いろいろな形の C_{60} を作ることができます．化学の文献では「Stone–Wales」変換と呼ばれているようですが，ここではこの変形を，注目している部分の形を意識して，**H 変形**と呼んでおきましょう．

では，この H 変形を使うと，C_{60} で表される分子構造はすべてサッカーボールから作ることができるのでしょうか？ 実は，ある研究集会でイギリスの化学者がこの問題について話しているのを聞いたことがあります．でも，私たちの研究グループでは，そんなことは常識なのでした．正確に言うと，それと対応する事実を知っているというべきでしょう．

まず，3 価の炭素で作られた分子構造を平面上に描いてみましょう．もちろん，結合手の長さは適当に調整する必要がありますよ．すると，どの頂点からも 3 本の辺が出ているグラフが得られますね．そういうグラフを **3-正則グラフ**と呼びます．そして，各領域に 1 つずつ赤い頂点を置いて，辺で接している 2 つの領域の中にある赤い頂点を赤い辺で結んでみます．すると，赤い辺はもとのグラフの辺を横切って三角形の領域を囲むように配置されています．そこで，その赤いグラフのこと

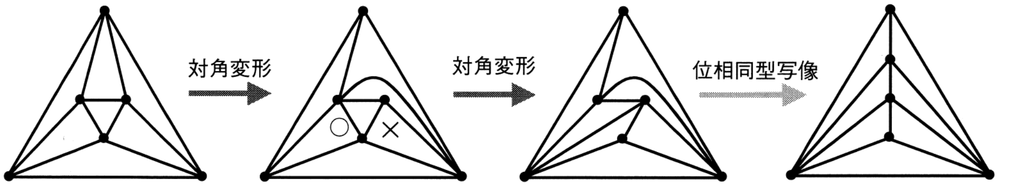


図 5　ワーグナーの定理． 頂点数の等しい平面上の任意の 2 つの三角形分割は互いに対角変形によって移り合います．これを証明するには，どんな三角形分割も対角変形によって標準形に変形できることを示せば十分です．

を平面の**三角形分割**と呼ぶことにしましょう．

つまり，平面に描かれた3-正則グラフと三角形分割は互いに他の裏返しになっているというわけです．その関係を経由すると，3-正則グラフのH変形は，三角形分割において対角線を切り替えるような変形に対応します．その変形を三角形分割の**対角変形**と呼びます．

実は，1930 年代にドイツの数学者ワーグナーが，頂点数が等しい平面上の任意の 2 つの三角形分割は対角変形を繰り返すことで互いに移り合うという定理を証明しています (図 5)．平面上の 3-正則グラフと三角形分割が対応していて，3-正則グラフのH変形がまさに対角変形に対応していることを理解すれば，ワーグナーの定理がその化学者が考えている問題に対する答えを与えていることは明らかですね．つまり，C_{60} に限らず，炭素原子の個数が等しい 2 つの球状のフラーレンはH変形によって互いに移り合うのです．ただし，その過程では，五角形，六角形だけでなく，三角形や七角形なども現れてしまいますが….

さらに，頂点数の等しい平面上の 2 つの三角形分割が何回の対角変形で互いに移り合うかという研究もあります．ワーグナーの証明をもとにその変形手順を考えると，頂点数の自乗に比例した回数でそれが可能であることがわかります．しかし，近年の研究によって，頂点数に比例した回数で十分であることがわかっています．

フラーレンに対してH変形を行うと，多少形が歪むので，分子構造のエネルギー準位が変動することになります．したがって，一番安定している分子構造から何回のH変形で他のものを作ることができるのかがわかれば，一番不安定な状態のエネルギー準位の上界を予測できることになります．その化学者は講演の中でその予想値を示すために，コンピュータを使って莫大な量の計算をしようと企てていると言っていましたが，私たちの研究成果を利用すれば，そんなことをするまでもありません．彼の講演の後にこの旨を彼に伝えたのですが，はたして私の英語力でそれを正しく伝えることができたかどうか….

5. 位相幾何学的グラフの復興

いずれにせよ，応用を意識すると，平面や球面の上に描かれたグラフを考えることになりますが，純粋に数学的な興味からすると，グラフを乗せる舞台をもっと自由に考えたい．それには 2 つの選択があります．

1 つ目はその舞台を空間にする．空間の中に点を配置して，それを線で結んでグラフを作ることを考えましょう．平面上では辺の交差を許さないと描けないグラフがありますが，空間なら辺の交差など簡単に解消できます．その代わりに，空間内では，結び目ができたり，絡んだりという現象が起こります．なので，空間内に置かれたグラフの研究は，**結び目理論**の発展形だと捉えることができます．例えば，DNA のような巨大分子は小さな細胞の中で折りたたまれたり，場合によっては結び目を作っていたりします．20 世紀の終わり頃から，そういうことと関連して結び目理論を研

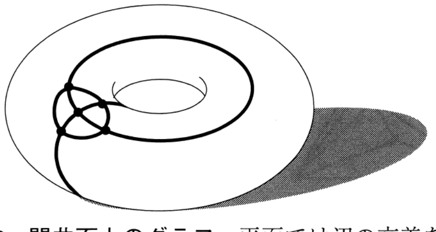


図6　**閉曲面上のグラフ**．平面では辺の交差なしには描けなかったグラフもトーラスの上でなら，描けることもあります．

究する人たちも現れました．

2つ目の選択は，依然として2次元的な束縛にこだわって，曲面上でグラフを考えることです．つまり，平面や球面の代わりに，**トーラス**やそれをいくつもつなげたような曲面の上にグラフを描いて考えます（図6）．**射影平面**や**クラインの壷**という4次元空間でないと実現できない曲面上で考えることもあります．そういうグラフ理論は，トポロジー＝位相幾何学と密接に関係するので，**位相幾何学的グラフ理論**と呼ばれています．そして，私は日本における位相幾何学的グラフ理論のパイオニアなのでした．

かつては四色定理や地図色分け定理を証明することが位相幾何学的グラフ理論の大きな原動力となっていました．そして，1970年代後半にその証明が完成されて，目標を失いかけていたそのとき，私と同年代の人たちが世界のあちこちに現れて，新しいタイプの位相幾何学的グラフ理論を始めたのです．例えば，私自身は，閉曲面の三角形分割の対角変形を考えて，1つの大きな理論を作りました．また，閉曲面上にグラフを描く方法が何通りもある場合，それらはどのような仕組みで生成されるのかという研究もしています．特に，1986年に私が提唱した次の予想は，位相幾何学的グラフ理論における未解決問題して，海外の研究者からも関心を集めています．

平面被覆予想　連結グラフが射影平面に埋め込み可能となるための必要十分条件は，そのグラフが有限の平面的被覆を持つことである．

過去20年間の研究成果として，16種類の特殊なグラフを除けば，予想は正しいことがわかっています．また，$K_{1,2,2,2}$ というグラフさえ反例でないことを示せば，予想が証明されたことになることもわかっています．なのに，その最後の1つが誰にも潰せない．誰もが正しいと信じてくれるのに，誰も証明できない．そういう予想を提言できたことを私は誇りに思っています．

ちなみに，私自身は純粋に数学的な興味から平面被覆予想を考えたのですが，ネットワークのエミュレータという観点でグラフの平面的被覆を研究している人もいます．与えられたネットワーク自体は平面的ではないのだけれど，平面的なネットワークでそれをエミュレートする．そうすることで，ネットワークに関する何かが改善されるのだそうです．

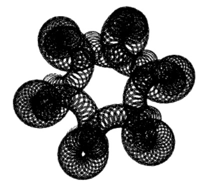
さらに，位相幾何学的グラフの1つの指導原理となっている**グラフマイナー**という理論があります．グラフの辺の縮約と除去という変形操作に基づいて，個々のグラフではなく，グラフ全体を半順序集合にして考えるというものですが，その考え方は閉曲面に埋め込まれたグラフとすごく相性がよい．おまけに，閉曲面にグラフを埋め込んで考察することで，すごくいいことが証明されてしまう．そのおかげで，諸々のアルゴリズムの高速化が保証できてしまうのでした．

その詳細を手短に述べることが不可能ですが，かつてグラフ理論は陳腐な数学だと非難していた人たちが大人になったグラフ理論の姿を知ったらどう思うのでしょうかねぇ….

さて，近年はグラフ理論に関する本がたくさん本屋さんに並んでいます．しかし，位相幾何学的グラフ理論に話題を限定した日本語の本は，拙著『位相幾何学的グラフ理論入門』（横浜図書）くらいしかありません．この本には，日本から発信されている位相幾何学的グラフ理論の発展の様子が記されています．平面被覆予想に関しては，きちんと説明しませんでしたが，興味のある方はこの本をご覧になってください．

（ねがみ・せいや，横浜国立大学教育人間科学部）

幾何とグラフィックス



杉原 厚吉

1. 座標系 ——できたらなしで済ませたいもの

グラフィックスとは，情報を目に見えるようにするための技術の総称で，そこでは平面図形や立体などの形とその動きを扱うことが中心課題となる．本稿では，その中で，立体の形状を定義する方法にスポットを当て，数理手法の盛衰を見ていく．本稿で扱う対象は図形であるから，そこで使われる数学的道具もおのずと幾何学が中心となる．中でも特に活躍するのが，デカルトが始めたと言われている**解析幾何学**の方法である．すなわち，まず空間に座標系を定め，すべての対象をその座標系に対する相対的な位置の関係として表現し，形の操作を計算に帰着させる方法である．

そのためには**座標系**はなくてはならないものである．しかし，座標系は本来扱いたい対象そのものではない．対象を記述するために導入する便宜的なものである．扱いたい対象は，座標系を導入する以前から独立してあったはずのものであり，座標系などなしで済ませられるなら，それに越したことはない．なぜなら，たまたま導入した一つの座標系に強く依存する操作は，対象の本質をうまく捉えていない場合が多いからである．

そういう観点から注意すべきものの代表は，**位置ベクトル**であろう．点をある座標系で表したときの座標は，それを成分とする位置ベクトル——すなわち原点からその点へ延ばした向きの指定された線分——とみなすことができる．このとき，いくつかの点の位置ベクトルの線形結合として新しい点を定義するなどということをしがちであるが，それでは，対象の本質をついた表現とはならない．なぜなら，位置ベクトルは原点の選び方に依存する（だから，実はベクトルではない；本来の定義に従えば，平行移動で互いに移り合う矢線は同一のベクトルと見なされる）ため，その線形結合として表された点は原点を取り替えると，別の点になってしまい，座標系に依存しない**不変性**をもたないからである．

原点をOとすると，点 P_i $(i=1,2,\ldots,n)$ の位置ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$ となり，それらの線形結合は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha_1\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} \tag{1}$$

と表すことができる．ここで $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ は実数である．これで確かに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を位置ベクトルとする点は一つに定まる．しかし，その点は原点Oを動かすと，それにつられて動いてしまう．

実際，点Oの代わりに点O′を原点としたときの式 (1) の右辺と同じ形式の線形結合で表される点をP′とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{O'P'}}=\alpha_1\overrightarrow{\mathrm{O'P}_1}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{\mathrm{O'P}_n} \tag{2}$$

と書けるが，図1に示すように（この図では $n=2$ の場合を示している），点Pと点P′は異なる．

このように，点の位置ベクトルの線形結合は，便宜的だったはずの座標系に依存するため，不変性

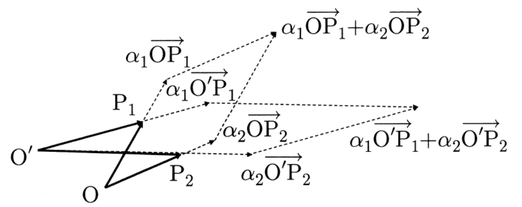


図 1　位置ベクトルの線形結合は座標不変性をもたない．

をもたない．こんな場合に，この道のプロは，よく表現 (1) は「筋が悪い」などと言う．

2. アフィン結合 ——座標系から自由になる方法

では，どのような表現が座標系に依存しない不変性をもち「筋がいい」のであろうか．それは，式 (1) の係数の間に

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1 \tag{3}$$

という関係が成り立つ特別な場合である．式 (3) が満たされるとき，(1) の表現は，特に点 $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ の**アフィン結合**と呼ばれる．

アフィン結合で表された点は，原点 O の選び方によらない．このことは次のようにして確かめることができる．$\overrightarrow{\mathrm{O'P}_i} = \overrightarrow{\mathrm{O'O}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$ だから，これを (2) に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{O'P'}} &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{O'P}_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{\mathrm{O'O}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_i}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{O'O}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{OP}_i} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{O'O}} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{OP}_i} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{O'O}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}} \end{aligned} \tag{4}$$

が得られる．ただし，上の式の 4 番目の等号は，式 (3) による．したがって，点 P′ は点 P と一致する．このように，アフィン結合で表される点は，原点の選び方に依存しない．

アフィン結合は原点に依存しないから，式 (1) は位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ の間のアフィン結合と言う代わりに，点 P_i $(i = 1, \ldots, n)$ のアフィン結合と言ってもよい．そして，式 (1) の代わりに

$$\mathrm{P} = \alpha_1 \mathrm{P}_1 + \alpha_2 \mathrm{P}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{P}_n \tag{5}$$

と書いてもよいであろう．ただし，点に実数をかけたり，それらを足したりすることの意味は，任意に選んだ原点に対する位置ベクトルに対する演算だと解釈する．実際，コンピュータグラフィックスの分野では，式 (5) の形式の表現がたくさん使われている．初めて見ると点の間に演算が施されるとんでもない式に見えるが，上に示したように立派に意味をもつだけでなく，座標不変な「筋のいい」式なのである．

2 点のアフィン結合は，その 2 点を通る直線上の点を表す．また，同一直線上にはない 3 点のアフィン結合は，それら 3 点を通る平面上の点を表す．

3. スプライン——操作しやすい立体表現

携帯電話などの小さなものから車や飛行機などの大きいものまで，工業製品を開発する際の形のデザイン作業は，形状設計と呼ばれ，グラフィックスの重要な応用分野の一つである．そこでは，デザイナーが頭の中で思い浮かべた形を，コンピュータの中の数値データへ苦痛なく変換できることが要求される．しかし，方程式の解集合や関数のグラフとして形状を表す方法では，限られた形状しか表現できず，しかもどの式を使うべきかがわかりにくく，この目的には向かない．

一方，アフィン結合を利用すると，望みの曲線や曲面を比較的簡単に表現することができる．この方法はスプライン表現と呼ばれる．これを，曲線を例にとって紹介しよう．

まず，図 2 に示すように，原点にピークをもち，原点に関して対称で，有界な台 $[-t_0, t_0]$ をもつ連続で単峰な関数 $N(t)$ を考える．さらに，$N(t)$

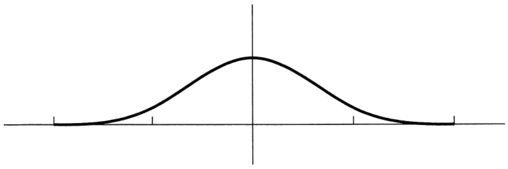


図 2 スプライン表現のための基本関数.

は，任意の実数 s に対して

$$\sum_{-t_0 \le s+i \le t_0} N(s+i) = 1 \qquad (6)$$

を満たすとする．

このような関数の一例は，$[-2,2]$ を台に持ち，区分的に 3 次多項式で表される次の関数である：

$$N(t) = \begin{cases} (3t^3 - 6t^2 + 4)/6 & (0 \le t \le 1), \\ -(t-2)^3/6 & (1 \le t \le 2), \\ 0 & (2 \le t). \end{cases} \qquad (7)$$

ただし，原点に関して対称なので，$0 \le t$ の範囲のみを示した．式 (7) で定義される $N(t)$ が式 (6) を満たすことは，直接計算すれば確かめられる．以下では式 (7) の $N(t)$ を想定して話を進める．

さて，空間に $n+1$ 個の点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ が固定されているとしよう．この点列の先頭に P_0 と同じ位置を占める 2 点 $\mathrm{P}_{-1}, \mathrm{P}_{-2}$ を加え，最後に P_n と同じ位置を占める 2 点 $\mathrm{P}_{n+1}, \mathrm{P}_{n+2}$ を加える．そして，$-1 \le t \le n+1$ の範囲を動くパラメータ t を用いて点 $\mathrm{P}(t)$ を

$$\mathrm{P}(t) = \sum_{i=-2}^{n+2} N(t-i)\mathrm{P}_i, \quad (-1 \le t \le n+1) \qquad (8)$$

と定める．式 (6) が成り立つから，式 (8) の右辺は点 $\mathrm{P}_{-2}, \mathrm{P}_{-1}, \ldots, \mathrm{P}_{n+2}$ のアフィン結合であり，$\mathrm{P}(t)$ は座標系によらず一意に定まる．t を動かすと $\mathrm{P}(t)$ も動き，その軌跡は曲線を表す．$\mathrm{P}(t)$ は**スプライン曲線**と呼ばれ，$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ はこのスプライン曲線の**制御点**と呼ばれる．図 3 に，点列と，それからこの方法で決まるスプライン曲線の例を示す．

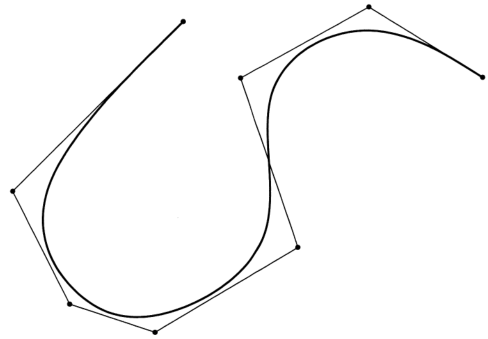


図 3 スプライン曲線.

t が -1 から $n+1$ まで連続に動いたとき，$\mathrm{P}(t)$ がどのような曲線を描くのかを直観的に考えてみよう．第一に，関数 $N(t)$ は，図 2 に示すように，$-2 < t < 2$ の範囲だけで非零の値をもつから，$\mathrm{P}(t)$ は $t-2$ より大きく $t+2$ より小さい整数 i に対する制御点 P_i のみのアフィン結合である．そのような点は一般の t に対しては 4 個あり，t が整数の場合には 3 個ある．したがって，曲線 $\mathrm{P}(t)$ 上の各点は近くの 4 点のみのアフィン結合であり，制御点 P_i を動かしたときの $\mathrm{P}(t)$ の変化は，$i-2 < t < i+2$ の範囲のみに限られる．

第二に，$t = -1$ のとき，非零な係数をもつ制御点は $\mathrm{P}_{-2}, \mathrm{P}_{-1}, \mathrm{P}_0$ のみであるから，$\mathrm{P}(-1)$ は P_0 に一致する．同様に $t = n+1$ のとき，非零な係数をもつ制御点は $\mathrm{P}_n, \mathrm{P}_{n+1}, \mathrm{P}_{n+2}$ のみであるから $\mathrm{P}(n+1)$ は P_n に一致する．

第三に，式 (8) のアフィン結合において第 i 制御点 P_i の係数が最も大きくなるのは $t = i$ のときである．アフィン結合で表される点は，係数が大きい点により近づく．したがって，t が増えていく途中で，t の値が $1, 2, 3, \ldots$ を通過するとき，それぞれ $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots$ に最も近づく．

第四に，次に示す意味で，$\mathrm{P}(t)$ は制御点から遠くへ離れることがない．まずいくつかの言葉を定義しよう．点の集合 X は，X に含まれる任意の 2 点を結ぶ線分が X に含まれるとき，**凸である**と言う．点集合 Y に対して，Y を含む最小の凸集合を Y の**凸包**と言う．アフィン結合 (1) は，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ がすべて非負のとき，特に**凸結合**と呼ばれる．点 $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \ldots, \mathrm{Q}_m$ の凸結合で表さ

れる点は，$Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ の凸包に含まれるという性質をもつ．

さて，式 (7) で定義される関数 $N(t)$ は非負である．したがって，式 (8) で定まる点 $P(t)$ は，相続く 4 個の制御点の凸結合であり，それら 4 個の制御点の凸包に含まれる．言い換えると，その凸包の外へはみ出すことはない．すなわち，曲線 $P(t)$ は，制御点から遠くへ離れることはない．

以上を総合すると，$P(t)$ は，始点 P_0，終点 P_n をつなぐ曲線で，次々と $P_1, P_2, \ldots$ の近くを通過し，制御点 P_i を動かしたときには，その近くだけで局所的に変化するという性質をもつ，このような性質は，設計者がコンピュータと対話しながら望みの曲線を作っていくのに適している．すなわち，制御点を動かしながら望みの曲線へ近づけていくことができる．この曲線表現法は，多くのシステムで曲線の描画法に使われている．

制御点を，平面ではなくて，3 次元空間に配置すると，スプライン曲線は空間曲線となる．また，2 つの添え字をもつ制御点の集合 $P_{ij}, i = 0, 1, \ldots, m; j = 0, 1, \ldots, n$ を使って

$$P(s,t) = \sum_i \sum_j N(s-i)N(t-j)P_{ij} \quad (9)$$

とおくと，$P(s,t)$ はやはり制御点の凸結合となり，s と t をパラメータとする曲面を表す．そして，このような曲面を，図 4 (a) に示すように，パッチワークのように貼り合わせることによって，立体の表面全体を表すこともできる．

とは言うものの，この方法で立体表面全体をなめらかな曲面として表すことはやさしくはない．なぜならパッチどうしがなめらかにつながるように貼り合わせることが，必ずしも容易ではないからである．特に図 4 (b) の中央の点のように 4 個以外の数のパッチが 1 点で接続する点でなめらかさを確保することが難しい．

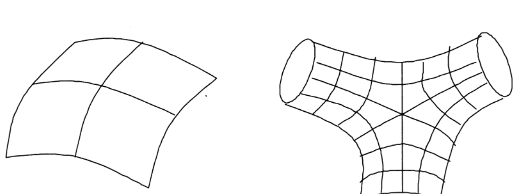
4. 細分割曲面
——時代の要請から生まれた手法

制御点に相当する少数の点の情報をもとに，立体表面全体をなめらかにつなぐ表現方法がある．それは細分割曲面と呼ばれる次のような技術である．

三角形を貼り合わせて立体を覆った構造を**三角形メッシュ**と言う．与えられた三角形メッシュの各三角形を，図 5 に示すように，辺の途中に 1 個ずつ新しい頂点を追加して 4 つの三角形へ分割する．そして，もとの三角形の頂点も新しく生成した頂点も，もとの三角形の頂点のアフィン結合によって新しい位置を定める．これが三角形メッシュの細分割と呼ばれる手続きである．どのようなアフィン結合を用いるかによって多様な細分割法が提案されている．

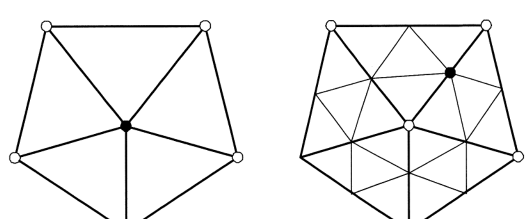
例えばLoop の細分割と呼ばれる方法では，もとの頂点は，その点自身と，それと隣り合う頂点（図 5 (a) の黒丸の頂点に対しては，5 個の白丸の頂点）にある方法で割り振られた係数のアフィン結合によって新しい位置が決められ，新しく生成された頂点に対しては，それを含むもとの辺の両側の三角形の頂点（図 5 (b) の黒丸の頂点に対しては，4 個の白丸の頂点）に割り振られた係数のアフィン結合によって位置が決められる．

細分割の多くの方法に対しては，細分割の手続



(a) (b)

図 4　パッチの貼り合わせによる曲面表現．



(a) (b)

図 5　Loop の細分割．

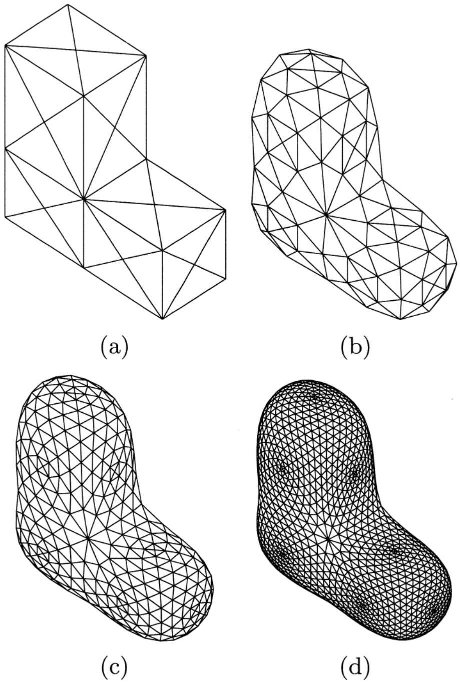


図 6　細分割曲面.

きを無限回繰り返して適用した結果がなめらかな曲面へ収束することが保証されている．この極限曲面は，**細分割曲面**と呼ばれる．

図 6 に Loop の細分割の例を示す．(a) の三角形メッシュに，細分割を 1 回施した結果が (b) であり，2 回施した結果が (c)，3 回施した結果が (d) である．応用の現場では，この操作を適当な回数施して得られる三角形メッシュを，細分割曲面の近似として用いる．

さて，読者の皆さんは，3 節で紹介したスプライン曲面の貼り合わせに比べて，本節で紹介した細分割曲面は，力任せの計算とメモリーの浪費の上に成り立つ強引な方法という印象をもたれるのではないだろうか．実際，細分割曲面が提案されて間もない頃は，スプライン曲面などの解析的な方法を手がけてきた多くの理論家から，同様の非難をたくさん浴びた．

しかし，実は，細分割曲面の方法は時代の要請であった．コンピュータのハードウェアが進歩し，計算が高速に実行でき，メモリーも大量に使えるようになって，手法開発者にも利用者にも負担の少ないことが最優先されるようになった．その結果，連続性の確保に多くの工夫を要するスプライン曲面パッチの貼り合わせより，乱暴な使い方をしても安定に動作する細分割曲面の方が，重宝がられるようになった．今では，ゲームソフトのキャラクター制作などの，表現の多様さが要求される立体モデリングの現場では，細分割曲面以外の曲面表現法はほとんど使われなくなってしまっている．数理手法の重要性も，時代とともに変わっていくものであることを痛感させられる場面でもある．

5. おわりに

本稿では，グラフィックスのために立体を表現する方法について見てきた．ここでは，座標系に依存しないアフィン結合による表現が主役を演じ，その中でも時代の変遷によって，解析的なスプライン手法から，強引ではあるが安定な細分割手法へと主要な手法が変わってきた姿を捉えた．この例からも，数理手法のどの側面が重要と見なされるかが時代とともに変わっていく姿を読み取っていただけたのではないだろうか．

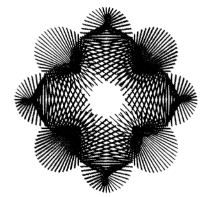
最後に参考文献を紹介しておこう．アフィン結合の枠組みで，立体を表現するスプライン曲面についてはFarin[1)]の教科書が定評がある．この本の初版は 1988 年に出版され，私の手元にあるのは第 2 版であるが，この本は版（増刷ではなく内容の変更）を重ね，現在は第 5 版まで出ている．一方，細分割曲面についてはPeters and Reif[2)]がこの分野のほとんど唯一の成書である．

参考文献

1) G. Farin: *Curved Surfaces for Computer Aided Geometric Design, 2nd Edition.* Academic Press, Boston, 1990.
2) J. Peters and U. Reif: *Subdivision Surfaces.* Springer–Verlag, Berlin, 2008.

（すぎはら・こうきち，東京大学大学院情報理工学系研究科）

繰りこみ群とリッチフロウ



伊 東　恵 一

1. リッチフロウ

リッチフロウ（Ricci flow）は曲面 M をその各点 σ での曲がり具合（**リッチテンソル** R_{ij}）に比例させて連続的に変形するプロセスである．クレイ研究所の 100 万ドルの賞金をそでにした“あの”ペレルマンの理論だというほうが通りがいいかもしれない．

具体的には曲面 M のリーマン計量 g_{ij}，**リッチテンソル** R_{ij} の間の

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} = -2R_{ij}$$

という形の方程式である．ただし

$$R_{ij} = \partial_k \Gamma^k_{ji} - \partial_j \Gamma^k_{ki} + \Gamma^k_{kl}\Gamma^l_{ji} - \Gamma^l_{jk}\Gamma^k_{li}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}\left(\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{li} - \partial_l g_{jk}\right)$$

であり，Γ^i_{jk} はクリストフェルテンソルである（同じ添え字については和をとるものとする）．

近似的に $R_{ij} \sim -\Delta g_{ij}$ なのでほぼ楕円型発展方程式である．これはハミルトンによって導入されたが，有限時間で曲面のある部分は点や線になったりで（**崩落**），それ以上の時間進展は不可能であった．ところがペレルマンは手術と呼ばれる方法で削除，縫合しこのプロセスを続けていけることを示し，これからポアンカレ予想を証明した（原論文[1]は難解．文献 2) はその解説.）

リッチテンソルは物理学では古くはアインシュタイン方程式に表れ，そして**リッチフロウ**は，曲面上に値をとるスピンモデル（**シグマモデル**）を論ずる過程で，ハミルトンの論文とほぼ同時期に表れた．この分析法は**繰りこみ群法**[3]と呼ばれる．

2. スピン模型または非線形シグマ模型

ここでは以下の 2 つの曲面の上に値をとるスピン統計モデルに限定しよう：

(i)　球面（S^2）スピンモデル

$M = \{\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3);$
$\langle\sigma,\sigma\rangle \equiv \sum_i (\sigma^i)^2 = 1\}$

(ii)　双曲面（H^2）スピンモデル

$M = \{\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3);$
$\langle\sigma,\sigma\rangle \equiv -(\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2 + (\sigma^3)^2 = -1,\ \sigma^1 \geq 1\}$

すなわち 2 次元**球面モデル**と，2 次元**双曲面モデル**で前者は正の，後者は負の**定曲率面**である．このとき $\Lambda \subset Z^2$ を 2 次元の格子点の正方形の部分とし，各点 $x \in \Lambda$ にはスピン $\sigma(x) \in M$ が配置される．ハミルトニアンを

$$H_\Lambda(\sigma) = \frac{1}{2}\sum_{|x-y|=1} \langle(\sigma_x - \sigma_y), (\sigma_x - \sigma_y)\rangle$$

とする．ここで $x \in \Lambda, y \in \Lambda$, $\langle\sigma_x, \sigma_x\rangle = \pm 1$ に注意．配位 $\{\sigma(x) \in M; x \in \Lambda\}$ の分布確率（ギッブス測度）を

$$\frac{1}{Z}\exp[-\beta H_\Lambda(\sigma)]\prod_{x\in\Lambda} d\sigma_x$$

としておく．また $M = H^2$ の場合，面積が無限大なので境界条件をつけておく．

物理的には S^2 モデルは**強磁性体モデル**であり，H^2 モデルは**アンダーソン局在**や**ランダム行列理論**のある局面を記述すると信じられている．さて

(i) $M = S^2$

$\sigma = (\cos\theta, \sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi)$

(ii) $M = H^2$

$\sigma = (\cosh t, \sinh t\cos\phi, \sinh t\sin\phi)$

と局所座標系を導入すると，S^2 では

$$\begin{aligned} d\sigma &= (-\sin\theta, \cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi)d\theta \\ &\quad +(0, -\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi)d\phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle d\sigma, d\sigma\rangle &= (d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\phi)^2 \\ &= \sum g_{ij}(\sigma)d\sigma^i d\sigma^j. \end{aligned}$$

ここで $g_{ij}(\sigma)$ はリーマン計量で，今の場合対角形で $\sigma^1 = \theta, \sigma^2 = \phi$ ととれば $g_{11} = 1, g_{22} = \sin^2\theta$ である．H^2 では $\sigma^1 = t, \sigma^2 = \phi$ として

$$\langle d\sigma, d\sigma\rangle = \sum g_{ij}(\sigma)d\sigma^i d\sigma^j$$

ただし $g_{11} = 1$, $g_{22} = \sinh^2 t$．このモデルではリッチテンソルも対角形で

S^2 の場合：$R_{ij} = g_{ij}$,　H^2 の場合：$R_{ij} = -g_{ij}$

が確かめられるが，数学的にはこれらは，S^2 (H^2) が正 (負) の**定曲率空間**であることを反映している．

3. スピン模型と繰り込み群

今格子幅は $a = 1$ であるが，これを $a\downarrow 0$ とし形式的**連続極限**で

$$H(\sigma) = \frac{1}{4\pi}\int_\Lambda g_{ij}(\sigma(x))\partial_\nu\sigma^i(x)\partial_\nu\sigma^j(x)d^2x.$$

ここで ∂_ν は $x \in R^2$ に関する偏微分．この形式的**連続極限**モデルの存在が（超）難問である．

$a \neq 0$ のとき系は存在するが $a\downarrow 0$ では発散が生じ，$a\downarrow 0$ 極限の存在をこの発散を処理して証明する．任意の $\sigma_0(x) \in M$（背景場）の近傍にある $\sigma(x) \in M$ を $\sigma_0(x)$ と接ベクトル ξ で

$$\sigma^i = \sigma_0^i + \xi^i - \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}\xi^j\xi^k + O(\xi^3)$$

と表すと

$$g_{ij}(\sigma) = g_{ij}(\sigma_0) + \partial_k g_{ij}|_{\sigma_0}\xi^k + \cdots$$

などとなり，ξ の 2 次式の部分は

$$-\frac{1}{4\pi}\int\left[(\nabla_\nu\xi^k)^2 - R_{ikjl}\partial_\nu\sigma^i\partial_\nu\sigma^j\xi^k\xi^l\right]dx$$

の形をとる．これが exp の中に入り ξ でのガウス積分になり，$t = -\log a\,(\uparrow\infty)$ の発散係数をもつ $R_{ikjk}\partial_\nu\sigma^i\partial_\nu\sigma^j = R_{ij}\partial_\nu\sigma^i\partial_\nu\sigma^j$ が補正項として表れる．ゆえに $a\downarrow 0$ 極限が存在するならば

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} = R_{ij}$$

が成り立つ（符号が逆になる）．いまの定曲率スピンでは，**リッチフロウ**は M の半径 $\alpha^{-1/2}$ を変えるだけで，$g_{ij}(t) = [\alpha(t)]^{-1}g_{ij}(0)$,

$$\alpha(t) = \frac{1}{\pm t + t_0}, \quad t_0 = 1$$

と解けてしまう．すなわち，S^2 模型では相転移はなく，$t\uparrow\infty$ で g_{ij} は無限大に近づき曲率が零になる（**漸近的自由**）．他方 H^2 模型ではある t_0 で $g_{ij} = 0$（**崩落**，曲率無限大）になり，2 次元にも関わらず相転移があると考えられる．

リッチフロウによる計算は低次近似なので幾分割り引いて考えるべきだが，大方の物理学者の同意する結論である．(H^2 は非有界で意見が分かれている．) この**リッチフロウ**はブラックホールの時間進展の研究にも応用されている．

参考文献

1) G. Perelmann, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv:math. DG/0211159.
2) B. Kleinert and J. Lott, Notes on Perelmann's paper, arXiv:math.DG/0605667v2.
3) K. Gawedzki, Lectures on Conformal Field Theory. Quantum Fields and Strings: a course for mathematicians (Princeton 1996–97), 727–805.

（いとう・けいいち，摂南大学工学部）

トロピカル幾何



梶原　健

トロピカル幾何は，今世紀になって研究されるようになった新しい幾何です[2]．この幾何に関連した話題の中には以前から研究されていたものもありますが，それらの関係はまだ十分には明らかになっていないように思います．本稿では，そんなトロピカルな話題をいくつか紹介したいと思います．

初めに，「トロピカル」という形容詞の由来について，例えば，文献 9) の冒頭に，（今日トロピカル代数と呼ばれている）min-plus 代数の先駆者であるブラジル人研究者の Imre Simon 氏にちなんで，フランス人の Pin 氏[6]などの同僚らが名付けた，とあります．ですから「トロピカル」という言葉から，あまり数学的内容が想起できるものでもなさそうです．ひょっとすると，こんな説明で皆さんをがっかりさせてしまったかもしれませんが，気分を入れかえて，数学の話を始めることにします．

トロピカル代数（より正確には**トロピカル半体**）とは，実数の通常の和と積の代わりに，最小値をとる演算（min）と通常の和（plus）を考えた実数のことです．max（最大値）と和を考えることもあります．和と積として min と plus を考えた代数系は min-plus 代数とも言われます．例えば，0, 1 に対して，トロピカル代数の和，積（それぞれ $\oplus, \odot$ と書く）をいくつか計算すると次のようになります．

$$0 \oplus 0 = 0,\ 1 \oplus 0 = 0,\ 1 \odot 0 = 1,\ 1 \odot 1 = 2$$

ちょっと意外な結果もあったかもしれません．

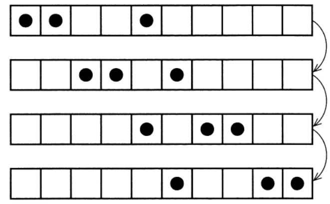
ちなみに，トロピカル代数は，通常のたし算，かけ算と同じ性質（交換法則，結合法則，分配法則など）をほとんどみたします．決定的な違いは，たし算に関する零元と逆元が存在しないことです．形式的に ∞ という元を付け加えて零元を持つようにはできますが，逆元は原理的に不可能です．実際，どんな実数 a に対しても $a \oplus a = a$ なので，仮に a に $\oplus$ に関する逆元 a' があったとすると，$(a \oplus a) \oplus a' = a \oplus (a \oplus a') = a \oplus \infty = a$ と $(a \oplus a) \oplus a' = a \oplus a' = \infty$ の両方から，すべての元が ∞ になってしまうからです．

さて，トロピカル代数の特徴は，和を min として，積を plus として考えることにあります．Simon 氏自身の応用[7]とは別の文脈から，この代数系が登場する例を 2 つ説明します．

まず一つめの例は，統計力学的なアイデアから導くことができます．2 つの実数 A, B に対して，

$$\lim_{\varepsilon \to +0} -\varepsilon \log(e^{-A/\varepsilon} + e^{-B/\varepsilon}) = \min(A, B)$$

が成り立っています．A, B の min が，指数関数と log の合成の極限で書けています．この極限を用いた変形の背後には，「ヘルムホルツ自由エネルギーの絶対零度の極限」（ε がボルツマン定数 × 絶対温度にあたる）という意味があります．この変形により新しく和や積を定義して，min-plus 代数が得られます．（積に関して



横一列に並んだ箱□と3つの玉 • に対して，次のルールで • を□に移す．
・⊡では • をとり，□にして右に進む．
・□では手元にとった • があれば⊡にして右に進む．• がなければ□のまま右に進む．

図 1

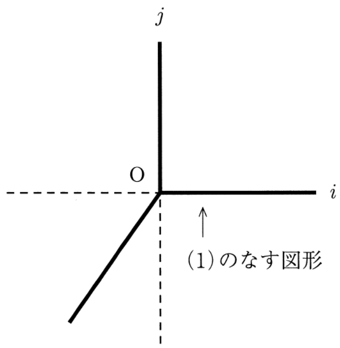


図 2

（一般の）トロピカル直線は

3 次元空間内では　　　4 次元空間内では

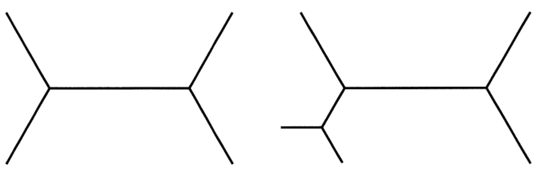


図 3

は，$\log(ab) = \log a + \log b$ より通常の和になります.）通常の和や積をこのように min（あるいは max）や和にする変形は「**超離散化**」と呼ばれています[1]．既知の方程式の超離散化により，類似の重要な現象も見えてきます．例えば，ソリトン方程式の超離散化によって「箱玉系」が得られます（図 1 参照）.

もう一つの例は，より幾何的な例で，トロピカル幾何と呼ばれるものです.

例えば平面の直線 $x+y+1=0$ を考えます．この直線上の点 (a,b) は $a+b+1=0$ をみたしていますが，この点を “形式的に展開” して，再びこの方程式を解きます．つまり，a, b を

$$a = a_i t^i + a_{i+1} t^{i+1} + a_{i+2} t^{i+2} + \cdots,$$

$$b = b_j t^j + b_{j+1} t^{j+1} + b_{j+2} t^{j+2} + \cdots$$

（ここで，$a_i, b_j \neq 0$ で，i, j は整数（負も許す），t は変数）と形式的に表して，

$$(a_i t^i + \cdots) + (b_j t^j + \cdots) + 1 = 0$$

を解きます．t で展開した a, b が解になるためには，まず，それぞれの先頭項が打ち消し合わないといけません．そのための条件は，

$$i = j \leq 0, \quad i = 0 \leq j, \quad j = 0 \leq i \qquad (1)$$

（$1 = t^0$ とします）です．ここで i, j としてすべての実数を考えると，(1) をみたす (i, j) は図 2 のようになります．これが平面における**トロピカル直線**の例です．3 次元空間や 4 次元空間における一般のトロピカル直線は，図 3 のようになります．この図形の形の特徴から，生物の進化を表す系統樹と関係づける研究[4,8]もあります.

ところで，展開した式 $\sum a_k t^k, \sum b_l t^l$ の和，積の先頭項の指数によって i, j の和，積（ただし，$i = j, a_i + b_j = 0$ を除く）を定義すると，これはちょうどトロピカル和やトロピカル積と一致しています．トロピカル代数とこのように関わってきます.

他にも，トロピカル代数やトロピカル幾何に関連した重要な応用があり[3,5]，トロピカルな数学は様々な分野で活躍しています．現状では，これらの研究はそれぞれ独立に発展しているように思われます．今後，読者の皆さんの活躍によって，これらの分野での研究が統合され，理論的にも発展していくことを期待して，拙文を終えることにします.

参考文献

1) 広田良吾, 高橋大輔,『離散と超離散』, 共立出版, 2003 年.
2) I. Itenberg, G. Mikhalkin, E. Shustin, *Tropical algebraic geometry*, Oberwolfach Seminars, Vol **35**, Birkhäuser, 2007.
3) 国場敦夫,「ベーテ仮説とヤング図形」, 数理科学, 2007 年 1 月号 No.**523**, 27–32.
4) 前野俊明, Tropical Grassmannian and construction of phylogenetic trees, 代数幾何学シンポジウム記録, 2007 年. 28–41.
5) G. Mikhalkin, Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbf{R}^2$, *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), 313–377.
6) J.-E. Pin, Tropical semirings, in “Idempotency, Bristol, 1994”, Publ. Newton Inst., **11**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, 50–69.
7) I. Simon, Limited subsets of a free monoid, in “Proc. 19th annual symposium on foundations of computer science”, Piscataway, N.J., Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1978, 143–150.
8) D. Speyer, B. Sturmfels, Tropical Grassmannian, *Adv. Geom.* **4** (2004), no.3, 389–411.
9) D. Speyer, B. Sturmfels, Tropical Mathematics, math.CO/0408099.

（かじわら・たけし，横浜国立大学大学院工学研究院）

微分幾何と現代の科学技術

甘利　俊一

1. はじめに

幾何学は土地の測量に関連して，古くから発展した数学である．ユークリッド幾何は2300年も昔に集大成し，緻密な論理構成を誇った．しかし，これが現実を反映する唯一の「幾何学」であるのか，それとも人間の理性が構想するもっと多様な幾何学があって，実は現実ももっと多様であるのかという議論が起こる．「平行線公理」の正当性をめぐって，非ユークリッド幾何学が建設され，ガウスはこれを曲面の幾何として正当化し，さらにリーマンによる空間概念の一般化を経て**リーマン幾何学**が成立する．

幾何学は，要素と要素のつながりと広がりを描く論理の体系である．これが空間である．我々が見る現実の3次元空間は一つの良い例であるが，他にもこのような幾何の論理で把握できる現実があってよい．リーマン自身も，宇宙スケールでの空間や，ミクロな原子レベルの空間は，ユークリッド幾何ではなくてこれを一般化したリーマン空間として捉えられるのではないかと予見した．

これが実るのは，アインシュタインによる一般相対性理論である．我々の住む4次元時空は，リーマン的な構造を持ち，物質の生む重力は空間のひずみとして認識される．物理学では，力学はもとより，素粒子論などで，空間概念が多用されている．

アインシュタインの相対性理論は，**微分幾何学**のさらなる整備発展をもたらした．重力と電磁気の統合を目指して統一場理論が研究され，これは失敗したとはいうもののゲージ変換や捩率（トーション）の導入などがあり，これが刺激となって Cartan による**接続の幾何**が整備される．その後，微分幾何はファイバーバンドル理論，トポロジーとの結合による大域的な考察，Chern の仕事へと発展し，近年では Gromov による空間全体を対象とする考察，さらに Ricci フローなどへと展開している．

2. 微分幾何の工学的展開

微分幾何を用いて現実の4次元時空間を考察する相対論以外にも，微分幾何の本格的な応用はいくつか現れた．例えば，工学的なモーターおよび発電機などの電気機械を一括して空間と考える**一般電機機械論**がハンガリー生まれの技術者 G. Kron によって提唱された[1)]．もとより，力学系は空間内の運動として捉えられる．簡単な例は，曲面上を滑り降りるボールで，これは曲面（2次元リーマン空間）の測地線に沿って運動する．ラグランジュ関数をもとに，幾何を作ることができる．最近は，力学系の表現として相空間をもとにシンプレクティック幾何を用いる．

Kron は，電荷と変位（回転角）を座標系として，電気機械の力学系を考えた．これは解析力学で普通に行われていることである．しかし電気機械（モーターや発電機）では，内部でのコイルに流れる電流が，外部へ入出力する電流とつながっている．回転機械では，この結合が多くの場合，回転角に応じて切り替わる．小学校で作るおもちゃのモーターには，ブラシと呼ぶ端子があって，これが回転軸に沿ってすべることで，内部と外部の結合を切り替えていく．この変換は，電流を瞬時に切り替えるが，それを積分した電荷で考えると，電流がばらばらなのでこれを積分しても，内部電荷と外部電荷の関係としては書けない．この仕組みを専門的にいえば電流間の結合が座標として**非ホロノーム**であって，積分不能である．内部座標で力学を記述したとして，これを実際に必要な外部の入出力座標で

記述するとき，この非ホロノーム性が捩率となって現れる．したがって，この力学系は**曲率**と**捩率**をもった空間での運動となる．Kron はすべての回転機械を包括する一般力学理論を，微分幾何の上に作り上げた．

これは，電機会社 GE で行った仕事で，GE は後に同社の創立を記念した事業の一つとして Kron の一般電気機機械を作り，世界の大学などに展示用として寄付した．東大にも一台あるはずである．

これとは別に，連続体，例えば鉄などの金属の弾性，塑性変形を扱う**連続体力学**には，Cartan の考えた接続の幾何そのものが現れる．連続体といっても，微細に見れば，原子からなりそこには結晶の乱れがある．これを連続体と見たときに，各点の近傍には微細な構造がある．フランスの工学者 Cosserat 兄弟は，このような仕組みを入れた連続体理論を作った．彼らは Cartan と親交があり，Cartan の接続の論文には彼らに対する謝辞が現れる．接空間の一般化とその接続について，当時のフランスのアカデミアで交流があり，純粋数学といえどもそのアイデアの源泉に現実からのヒントがあったのである．

金属連続体の微細構造には，結晶配列の乱れであるディスロケーションがあり，これが塑性変形の核になる．ここでは，**接空間**を整った結晶と考えると，その接続が原子構造の乱れによって捩れて捩率を生む．こうして，**非リーマン塑性論**の研究が始まった[2]．これは，ディスロケーションの運動，生成消滅を含む 4 次元に拡張できる．ここで捩率が主要な役割を果たす．これにさらに磁性を入れれば，スピンの向きが点に加わり，接空間の計量や接続が方向に依存する **Finsler 空間**の構造が現れる．これらは，私も大学院学生の一時期に本気で研究した．後に，ランダウ–リフシッツの連続体力学の教科書が出たときに，私の理論のほうが一歩先んじていたことを見出して大変うれしかったことを覚えている．

微分幾何は連続的に広がった現象を論ずるのに普遍的な方法であって，この他にもその応用は至るところに現れている．本稿では，情報分野に出現した**情報幾何**について述べてみたい．ここでは，それまで微分幾何の理論になかった**双対接続**の概念が新しく提出された．その後，その応用として信号処理分野で話題になっている，ダイバージェンスと射影について，その微分幾何，特に双対平坦な幾何との関係を述べる．

3. 情報幾何の構造—双対接続について

情報幾何についてはこれまでにもいろいろと紹介されてきているので[3]，ここではごく簡単にその骨子を述べたい．情報幾何は，**確率分布族**のなす自然な**幾何構造**の探求から始まった．

いま，x を離散値 $1,2,\cdots,n+1$ の値をとる確率変数とし，その分布 $p(x)$ の全体を S_n としよう．一つの確率分布 $p(x)$ は，$n+1$ 次元の確率ベクトル

$$\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_{n+1}) \tag{1}$$

で表してよい．$p_i=\mathrm{Prob}\{x=i\}$ である．$\sum p_i=1$ であるから，これを全部集めた S_n は n 次元の空間としての広がりを持っている．

しばらくの間，もっと一般の話にして，n 次元パラメータ $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ で指定される確率分布の族，

$$S=\{p(x,\boldsymbol{\xi})\} \tag{2}$$

を考えよう．x は確率変数である．大域的な構造は無視して，S は $\boldsymbol{\xi}$ を局所座標系の一つとする，n 次元多様体をなすとする．

S に幾何構造を導入するために，次の不変性の要請を導入する．

不変性の要請：S の幾何構造は，確率変数の表現の変換に関して不変である．

これは，x が実数なら，1 対 1 の変換で $y=f(x)$ としたときに，x の確率分布の族 $S=\{p(x,\boldsymbol{\xi})\}$ と y の分布の族 $\bar{S}=\{\bar{p}(y,\boldsymbol{\xi})\}$ とは同じ構造を持つことを要請するものである．x が離散値のときについては後でもっと詳しく述べる．不変性の要請から，S の**リーマン計量**と**アファイン接続**が次のように決まる．

リーマン計量：不変なリーマン計量はユニークに決まり，Fisher 情報行列

$$g_{ij}(\boldsymbol{\xi})=E\left[\frac{\partial\log p(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_i}\frac{\partial\log p(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_j}\right] \tag{3}$$

で与えられる．E は $p(x,\boldsymbol{\xi})$ による期待値を意味する．

計量は微小な 2 点間の距離を与える．2 つの分布，$p(x,\boldsymbol{\xi})$ と $p(x,\boldsymbol{\xi}+d\boldsymbol{\xi})$ の間の距離の二乗は，2 次形式

$$ds^2=\sum g_{ij}(\boldsymbol{\xi})d\xi_i d\xi_j \tag{4}$$

で与えられる．微小な 2 点間の距離を積分すれば，曲線に沿った長さが得られる．2 点間を結ぶ曲線の中で，距離が最短なものを**リーマン測地線**と言う．

アファイン接続：不変なアファイン接続は，α をスカラーパラメーターとして，

$$\Gamma^{\alpha}_{ijk} = [ij;k] + \alpha T_{ijk} \tag{5}$$

で与えられる．ここで，$[ij;k]$ はリーマン計量から得られる接続の係数（クリストッフェル記号）で，T_{ijk} は，テンソル

$$T_{ijk} = E\left[\frac{\partial \log p(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i}\frac{\partial \log p(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j}\frac{\partial \log p(x,\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k}\right] \tag{6}$$

である．

接続は，不変性の観点からは一意に定まらない．各 α についてそれぞれ意味があるはずであるが，特に $\alpha=1$ の**指数接続**と $\alpha=-1$ の**混合接続**が大きな役割を果たす．また，α 接続と $-\alpha$ 接続は**双対**であって，数学的には ∇, ∇^* をそれぞれ接続に伴う**共変微分**とするとき，ベクトル場 X, Y, Z に対して

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla^*_X Z\rangle \tag{7}$$

が成立するとき，∇ と ∇^* は計量 g に関して双対であると言う．ただし，この定義はこれからの説明では用いないので，気にしなくて良い．

接続は，接空間どうしの周りの関係を定めるが，これによって，まっすぐな線，すなわち**測地線**が定義できる．α 接続によって，α 測地線が定まる．$\alpha=0$ のときの測地線がリーマン測地線である．

ユークリッド空間にあっては，2 点間を結ぶ直線は最短経路の線であり，かつ方向が変わらない線（まっすぐな線）でもある．一般の空間では，この 2 つの概念，すなわち最短性と“まっすぐ”という概念が一致する保証はない．$\alpha=0$ であるリーマン接続は，この 2 つが一致するように定めたものである．

情報幾何で導入される接続は α 接続と $-\alpha$ 接続とが双対である．これはリーマン接続を α と $-\alpha$ の 2 つに分け，それぞれ別に測地線（まっすぐな線）を定義する．これを $\alpha(-\alpha)$ 測地線と言う．この 2 つが対になってリーマン計量を支える．なお，リーマン接続は $\alpha=0$ で，**自己双対**の場合である．

確率分布族の空間は，一般に曲がっていてユークリッド空間ではない．しかし，$\alpha=1$ の指数接続および $\alpha=-1$ の混合接続の観点では平坦な空間が現れる．離散型の空間 S_n は，指数接続および混合接続に関して平坦である．リーマン接続の意味からは曲がっているから，これはユークリッド空間にはならない．一般の空間は，離散分布の場合には，**双対平坦**な S_n の曲部分空間になっている．S_n の指数型の測地線と混合接続の測地線を，それぞれ**指数測地線**，**混合測地線**と言う．

双対平坦の空間では，**アファイン座標系**が定義でき，座標曲線自体が測地線になる．いま，指数接続のアファイン座標を $\boldsymbol{\theta} = (\theta^1, \cdots, \theta^n)$ 混合接続のアファイン座標系を $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$，としよう．このとき，$S_n$ では，これらは

$$\theta^i = \log \frac{p_i}{p_{n+1}}, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{8}$$

$$\eta_i = p_i \tag{9}$$

である．これらは直交座標系ではないが，この 2 つの座標軸はリーマン計量の下で互いに直交する．すなわち，座標軸 θ^i と座標軸 $\eta_j (i \neq j)$ は互いに直交する．

双対平坦の空間には，それぞれのアファイン座標について，凸なポテンシャル関数 $\psi(\boldsymbol{\theta}), \varphi(\boldsymbol{\eta})$ が存在する．この関数は互いに**ルジャンドル変換**で結ばれていて，

$$\eta_i = \frac{\partial}{\partial \theta^i}\psi(\boldsymbol{\theta}), \quad \theta^i = \frac{\partial}{\partial \eta_i}\varphi(\boldsymbol{\eta}), \tag{10}$$

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) + \varphi(\boldsymbol{\eta}) - \sum \theta^i \eta_i = 0 \tag{11}$$

と書ける．S_n の場合，$\psi(\boldsymbol{\theta})$ は**キュミュラント生成関数**で，双対のポテンシャル $\varphi(\boldsymbol{\eta})$ は**エントロピー**を負にしたものである．

また，2 つの分布 $p(x,\boldsymbol{\theta})$ と $p(x,\boldsymbol{\theta}')$ との間に**ダイバージェンス関数**

$$D\left[p(x,\boldsymbol{\theta}) : p\left(x,\boldsymbol{\theta}'\right)\right] = \psi(\boldsymbol{\theta}) + \varphi\left(\boldsymbol{\eta}'\right) - \sum \theta^i \eta'_i \tag{12}$$

が存在する（$\boldsymbol{\eta}'$ は $\boldsymbol{\theta}'$ 点の対応する混合座標）．これは

$$D\left[p : p'\right] = E\left[\log \frac{p(x,\boldsymbol{\theta})}{p(x,\boldsymbol{\theta}')}\right] \tag{13}$$

のように書け，Kullback–Leibler のダイバージェンスとしてよく知られている．ダイバージェンスに関して次の定理が存在する．

定理：

1) 2 つの近い分布 $p(x,\boldsymbol{\theta})$ と $p(x,\boldsymbol{\theta}+d\boldsymbol{\theta})$ に関して，それらの間のダイバージェンスはリーマン距離の二乗である．

$$D\left[p(x,\boldsymbol{\theta}) : p(x,\boldsymbol{\theta}+d\boldsymbol{\theta})\right] = \frac{1}{2}\sum g_{ij}\, d\theta^i d\theta^j. \tag{14}$$

2) 3つの分布，$p(x), q(x), r(x)$ に関して，p と q を結ぶ混合測地線が，q と r を結ぶ指数測地線と直交するとき，次の**ピタゴラスの定理**が成立する．

$$D[p:r] = D[p:q] + D[q:r] \tag{15}$$

3) M を S_n に含まれる滑らかな部分空間とする．M の外の点 p に対して，M 内の点 q でダイバージェンスの意味で p に最も近い点

$$p^* = \arg\min_{q \in M} D[p:q] \tag{16}$$

は，p を M に**混合射影**した点，すなわち p と p^* とを結ぶ混合測地線が M と直交する点である．また，これと双対に

$$p^{**} = \arg\min_{q \in M} D[q:p] \tag{17}$$

は，p を M に**指数射影**した点である．

こうした情報幾何の定理は，統計的な推論はもとより，人工知能における確率推論，機械学習，最適化理論，システム理論，情報理論など，工学理論で多用されている[4]．

4. 確率測度および正測度に対するダイバージェンス関数

確率ベクトル $\boldsymbol{p}$ は，制約

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1 \tag{18}$$

を満たす．この制約を取り去って，単に $\tilde{p}_i > 0$ とした $\tilde{\boldsymbol{p}}$ を正測度ベクトルと言う．信号処理などの工学問題では，確率測度と同じく正（非負）の成分を持つ測度ベクトルが多く使われる．これは，もっと一般に2つのインデックスを持つ行列の形であったり，さらにインデックスを増やしたテンソル型のものなどがある．こうした要素の間にダイバージェンス関数を導入しよう．

仮にデータから，こうしたベクトル $\hat{\boldsymbol{p}}$ が得られたとする．しかし，データを発生する機構には内部の構造があって，実際のベクトルはある制約を満たすモデル M の中に限られていたとする．このとき，観測データから，モデル M の中でこれに一番近いものを探す問題が考えられる．統計的推論も，$\hat{\boldsymbol{p}}$ を観測した頻度ベクトルとして，統計モデル M を S_n の中に考え，デー

タをここに射影することになる．**最尤推定**は，KL ダイバージェンスを最小にする射影，つまり指数型測地線による射影である．

ここでは，いろいろなダイバージェンスを考え，それを情報幾何の立場から考察する．

4.1 $\boldsymbol{f}$ ダイバージェンス

2 つの確率分布の間のダイバージェンスについては，いろいろなものが知られている．Csiszar は，凸関数 f を用いて，2 つの分布 $p(x)$ と $q(x)$ の **$\boldsymbol{f}$ ダイバージェンス**を，

$$D_f[p:q]=\sum p(x)f\left\{\frac{q(x)}{p(x)}\right\} \tag{19}$$

で定義した．ただし，凸関数 f は，

$$f(1)=0, \quad f'(1)=0, \quad f''(1)=1 \tag{20}$$

を満たすものとして一般性を失わない．このうちで，

$$f(u)=-\log u+u-1 \tag{21}$$

とおいたものが，Kullback–Leibler のダイバージェンスである．

f ダイバージェンスは不変性を有する．これをもう少し正確に述べよう．x が $n+1$ 個の値をとるとき，この値を $m+1$ 個 $(m<n)$ にグループ分けしよう．グループに番号をつけ，それを記号 $\kappa=1,\cdots,m$ で表そう．κ 番目のグループ A_κ に含まれる番号を $A_\kappa=\{\kappa_1,\cdots,\kappa_s\}$ のように書く．例えば，このグループ分けは

$$\{(1,2),(3,4,5),\cdots,(\cdots,n+1)\} \tag{22}$$

のようになる．各グループの確率は，そこに含まれる要素の確率を足し合わせたものだから，

$$p\left(A_\kappa\right)=\bar{p}_\kappa=\sum_{i\in A_\kappa} p_i \tag{23}$$

である．

こうして得られたグループの確率分布

$$\bar{\boldsymbol{p}}=(\bar{p}_1,\cdots,\bar{p}_{m+1}) \tag{24}$$

は，グループ内の要素はすべてひとまとめにしてその中の違いを見ない，**疎視化**したものである．当然，2 つの確率分布の違いを表すダイバージェンスは，疎視化によって小さくなる．

$$D_f[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}]\geq D_f\left[\bar{\boldsymbol{p}}:\bar{\boldsymbol{q}}\right]. \tag{25}$$

しかし，もし各グループの中で

$$p_i=\lambda_i q_i, \quad i\in A_\kappa \tag{26}$$

のような比例関係が成立しているならば，どのグループに属しているかだけでなくそこからさらにグループ内でのどの要素だったかを観測しても，それはもとの 2 つの分布 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ の違いを明らかにしない．細分化された要素の確率は互いに比例しているから，そこからは情報はもはや得られない．これを考えに入れて，次のより精密な不変性の要請を導入する．

不変性の要請：2 つの分布のダイバージェンスは，疎視化によって減少する．ただし，(26) が成立するときは，ダイバージェンスは変化せず，等号が成立する．

この性質を**単調性**と言い，量子情報幾何では基本的な要請として使われている．f ダイバージェンスは，不変性を満たすことで特徴付けられる．

関数 f として，

$$f_\alpha(u)=\begin{cases}\frac{4}{1-\alpha^2}\left\{1-u^{\frac{1+\alpha}{2}}\right\} \\ \qquad +\frac{2}{1-\alpha}\{u-1\}, & \alpha\neq\pm1 \\ -\log u+u-1, & \alpha=-1 \\ u\log u-(u-1), & \alpha=1\end{cases} \tag{27}$$

を用いたダイバージェンスを **$\boldsymbol{\alpha}$ ダイバージェンス**という．KL ダイバージェンスは，$\alpha=-1$ の場合で，KL ダイバージェンスの引数をひっくり返した $D[q:p]$ は，$\alpha=1$ ダイバージェンスである．$\alpha=0$ の場合は，ヘリンジャー距離の二乗となっている．

一般に，不変なダイバージェンスを用いると，α 双対接続の幾何が得られる．すなわち，

$$g_{ij}=\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}D, \tag{28}$$

$$\left[p(x,\boldsymbol{\theta}):p(x,\boldsymbol{\theta}')\right]_{\boldsymbol{\theta}'=\boldsymbol{\theta}} \tag{29}$$

でリーマン計量が，また接続としては

$$T_{ijk}=\frac{\partial^3}{\partial\theta^i\partial\theta^j\partial\theta^k}D, \tag{30}$$

$$\left[p(x,\boldsymbol{\theta}):p(x,\boldsymbol{\theta}')\right]_{\boldsymbol{\theta}'=\boldsymbol{\theta}} \tag{31}$$

を用いる双対的なアファイン接続が得られる．

しかし，α 接続は一般には平坦ではない．とはいえ，$\alpha=\pm1$ の場合には S_n として双対平坦な空間が得られる．そこで，確率分布の制約を取り除き，正測度の空間 $\tilde{S}_n$ で考えよう．このとき，α ダイバージェンスからは，α 平坦な空間が得られる．

このとき，アファイン座標系は，

$$\tilde{\theta}_i=\tilde{p}_i^{\frac{1-\alpha}{2}}, \quad \tilde{\eta}_i=\frac{2}{1-\alpha}\tilde{p}_i^{\frac{1+\alpha}{2}} \tag{32}$$

で与えられる．確率分布の空間はこの部分空間になる．このとき，制約 $\sum\tilde{p}_i=1$ の制約は，$\alpha=\pm1$ の場合

を除いては，平坦な部分空間ではない．だから，正測度の空間で考えれば，確率分布の空間は曲がった部分空間で α 接続は平坦にならない．正測度の空間ではこれは α 平坦で，ピタゴラスの定理や射影定理がすべて成立する．これをもとに工学の理論が作られる．

4.2 Bregman ダイバージェンス

凸関数 $\psi(\boldsymbol{\theta})$ が与えられたとしよう．このとき，2 点 $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2$ の間のダイバージェンスを

$$D_\psi[\boldsymbol{\theta}_1 : \boldsymbol{\theta}_2] = \psi(\boldsymbol{\theta}_1) - \psi(\boldsymbol{\theta}_2) - \nabla\psi(\boldsymbol{\theta}_2)\cdot(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2) \tag{33}$$

で定義することができる．∇ はグレージエント $\partial/\partial\boldsymbol{\theta}$ である．これを **Bregman ダイバージェンス**と呼ぶ．

情報幾何では，双対平坦な空間があると，凸なポテンシャル関数が存在して，そこからダイバージェンスが定義できた．このダイバージェンスは Bregman ダイバージェンスと同じものである．ただし，確率分布空間の情報幾何から得られるダイバージェンスは常に不変性を満たす．Bregman ダイバージェンスは一般に不変性を満たすとは限らない．

不変性を満たすかどうかに限らず，一般に凸関数から双対平坦なリーマン空間を導くことができる．ここでは話を簡単にして，$U(z)$ を一変数の凸関数として，次の形の凸関数

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \sum U(\theta_i) \tag{34}$$

を考えよう．ルジャンドル変換により，その双対変数

$$\eta_i = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\psi(\boldsymbol{\theta}) = U'(\theta_i) \tag{35}$$

が得られる．U の微分を u, v を u の逆関数として，

$$\eta_i = u(\theta_i), \quad \theta_i = v(\eta_i) \tag{36}$$

となる．このとき，空間は $\boldsymbol{\theta}$ をアファイン座標，$\boldsymbol{\eta}$ を双対アファイン座標として，双対平坦になる．

江口は，U として次の関数

$$U_\beta(z) = \frac{1}{\beta+1}(1+\beta z)^{1+\frac{1}{\beta}}, \quad \beta \neq 0 \tag{37}$$

$$U_0(z) = \exp(z) \tag{38}$$

を考え，ここから得られるものを **$\boldsymbol{\beta}$ ダイバージェンス**と呼んだ．これは，$\beta=0$ のときは KL ダイバージェンスになる．しかし，それ以外は不変性の要請を満たさないから，f ダイバージェンスとは異なる．$\eta_i = \tilde{p}_i$ とおいたときに U 関数から得られる幾何構造は，双対平坦リーマン空間ではあるが，これは一般に α 双対平坦空間とは異なる．リーマン計量は

$$g_{ij} = u'(\theta_i)\,\delta_{ij} \tag{39}$$

で，これは Fisher 情報行列ではない．また，$\boldsymbol{\eta}$ 平坦座標は $\tilde{p}_i$ であるが，その双対座標は $\log\tilde{p}_i$ ではない．

ダイバージェンスは，正測度の空間では双対平坦であった．したがって，これは凸ポテンシャル関数を持ち，ここからの Bregman ダイバージェンスの形で書ける．それには，話を少し拡張する必要がある．

確率分布（正測度）$\tilde{p}_i$ の表現として，α 表現

$$r_i = \begin{cases} p_i^{\frac{1-\alpha}{2}}, & \alpha \neq 1 \\ \log p_i, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{40}$$

を導入しよう．この r_i を座標系として，随伴する U 関数として

$$U(r_i) = \tilde{p}_i = \begin{cases} r_i^{\frac{2}{1-\alpha}}, & \alpha \neq 1 \\ \exp(r_i), & \alpha = 1 \end{cases} \tag{41}$$

を用いる．このとき，U は α 表現 r_i の関数として凸関数になっている．ここから双対平坦幾何構造が得られる．これは不変性を満たす．このときの α 双対アファイン座標系は

$$r_i^* = \begin{cases} \frac{2}{1-\alpha}\tilde{p}_i^{\frac{1+\alpha}{2}}, & \alpha \neq 1 \\ \tilde{p}_i, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{42}$$

である．ここから得られる幾何学は α 双対平坦の幾何学である．ただ，確率分布族 S_n に限れば，それは

$$\sum U(r_i) = 1 \tag{43}$$

を満たす部分空間であるが，これは α 表現での平坦な部分空間ではないので，その族は双対平坦にはならない．

α 分布族は，特別な地位を占める．それは，f ダイバージェンスから得られる不変な幾何構造を持ち，さらに双対平坦で，Bregman ダイバージェンスの族にも属する．

5. α 平均と α 分布族

α 接続，α 分布族，α ダイバージェンスなど，一つのパラメータ α を含む族が多数現れてきた．α 表現を見れば分かるように，u の α 表現は $u, \sqrt{u}, \log u$ を滑らかにつなぐ関数族を作る．この族は，Renyi の α エントロピー，Tsallis のエントロピーにも関係している．

ここでは，**α 平均**を考えよう．2 つの数 a, b の平

均には相加平均，相乗平均，調和平均などがよく知られている．これらは

$$\frac{a+b}{2}, \quad \sqrt{ab}, \quad \frac{2}{a^{-1}+b^{-1}} \tag{44}$$

などである．

ここで，単調で正の値を取る関数 $f(u)$ を考え，数 a の f 表現を $f(a)$ としよう．数 a, b の平均を取るのにその f 表現を用いて $f(a)$ と $f(b)$ の算術平均を取り，それを f^{-1} で戻したもの

$$m_f(a,b) = c_f f^{-1}\left\{\frac{f(a)+f(b)}{2}\right\} \tag{45}$$

を a, b の f 平均と言う．ここで定数 c_f は

$$m_f(a,a) = a \tag{46}$$

が成立するように定めればよい．

f 平均で，**スケール不変性**，つまり任意の正の定数 c について

$$m_f(ca, cb) = c m_f(a,b) \tag{47}$$

を要請しよう．これが成立するのは，f が α 表現であるときに限ることが証明できる．これを α 平均と言う．

明らかに，$\alpha = -\infty, -1, 0, 1, 2$ に対して

$$m_{-\infty}(a,b) = \max(a,b), \tag{48}$$

$$m_{-1}(a,b) = \frac{a+b}{2}, \tag{49}$$

$$m_1(a,b) = \sqrt{ab}, \tag{50}$$

$$m_2(a,b) = \frac{2}{a^{-1}+b^{-1}}, \tag{51}$$

$$m_\infty(a,b) = \min(a,b) \tag{52}$$

が成立し，α 平均は通常の知られている相加平均，相乗平均，調和平均だけでなく，極限としてファジーで使われる $\max, \min$ をも含む大きな族である．

α 平均は，もっと多数の数の，重み付き平均に拡張できる．これを，確率分布族，または正測度の族に広げたものが **α 分布族**である．

最後に，**Bayes 推論**の関係を述べておく．Bayes 推論では，パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ による確率変数の確率分布 $p(x, \boldsymbol{\theta})$，パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の事前分布 $\pi(\boldsymbol{\theta})$，そして独立に観測されたデータ $D = \{x_1, \cdots, x_n\}$ を考える．ここから，分布のパラメータの事後分布

$$p(\boldsymbol{\theta}|D) = \frac{p(D, \boldsymbol{\theta})}{p(D)} \tag{53}$$

が得られる．

事後分布をもとに，これから出るであろう新しい x についての分布を推定したい．これを**予測分布**と言う．予測分布のよさとして，真の分布 $p(x, \boldsymbol{\theta}_0)$ と予測分布 $p(x|D)$ の KL ダイバージェンスの期待値を最小にするものが，通常の Bayes 推論の予測分布である．これは，確率分布 $p(x, \boldsymbol{\theta})$ を事後分布 $p(\boldsymbol{\theta}|D)$ を用いて平均したものである．

ここで，予測分布の良さの基準として，もっと一般の α ダイバージェンスを用いてみよう．このときの最適な予測分布は，事後分布を用いた α 平均になることが示せる．

6. おわりに

微分幾何学は，自然科学はもとより工学の分野でも，現象を不変性の観点から記述し，その仕組みを表現するための本質的な論理を提供する．非線形問題は多くの場合，ある点の近傍を取り上げてそこでの線形近似を行うが，これは接空間による線形近似である．これを一歩進めて隣り合う接空間の関係を取り上げ，これをつないで全体性を回復するのが微分幾何の方法である．この後に，さらに大域的な性質が現れる．

本稿では，微分幾何の応用を歴史的に概観して情報幾何に至り，そこで現れる双対接続の概念，さらにそこから生ずる α 接続，α 表現，α 分布族などを考えた．これは，双対平坦性が生み出す新しい構造であり，ルジャンドル変換の幾何学的な基礎を与える．最後に α 平均と αBayes 推論に触れた．

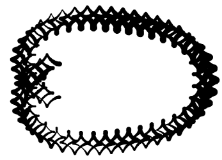
微分幾何は難しいものではない．多くの研究者がこれに親しむことを願っている．

参考文献

1) G. Kron: Non-Riemannian Dynamics of Rotating Electrical Machinery, *Journal of Mathematics and Physics*, **13**, 2, 103–194 (1934).
2) 例えば，S. Amari: On some primary structures of non-Riemannian plasticity theory, RAAG Memoris of Unifying Study of Basic Problems in Engineering and Physical Sciences by Means of Geometry, Ed. K. Kondo, Gakujutsu Bunken Fukyu-kai, D-1X, 91–99 (1962).
3) S. Amari and H. Nagaoka: *Methods of Information Geometry*, AMS & Oxford U Press (2000).
4) 村田昇：『情報理論の基礎』，SGC ライブラリ 37，サイエンス社，(2004).

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

実証的トポロジー科学：新しいパラダイム



丹田　聡・坪田　雅功

1. はじめに

そもそもトポロジーとは「ちぎったり貼ったりせずに構造を連続変形したときの不変的性質を探る」学問として数学の幾何学分野で生まれ，20世紀前半から曲がった時空を表す一般相対性理論や場の量子論などの基礎物理分野において自然な形で利用されてきた．20世紀後半に入り，トポロジカルな2重螺旋構造をもつDNAや液晶・超伝導体におけるトポロジカル欠陥の発見に伴い，物性分野においても応用されるようになってきた．現在では熱相転移や量子相転移などの臨界現象を扱う複雑系分野や，システムとしての関係性を重んじる生命科学，カーボンナノチューブ，各種ネットワーク，量子情報科学とも密接な関係があることが明らかになってきている．それはまさにトポロジーが「局所的な性質（部分）と大局的な性質（全体）の相関を解明する」という極めて一般的な科学的手法の確立を目的とした学問であるため，単に数学や物理学に留まらず，自然科学・社会科学・先端工学分野に対して，幅広く適用可能な新しいアプローチ手法として注目されている（図1）．今回は特に実験屋からみた実証的なトポロジー結晶学・トポロジー物性物理学ひいてはもっと広げてトポロジー科学の可能性に焦点をあて述べてみる．

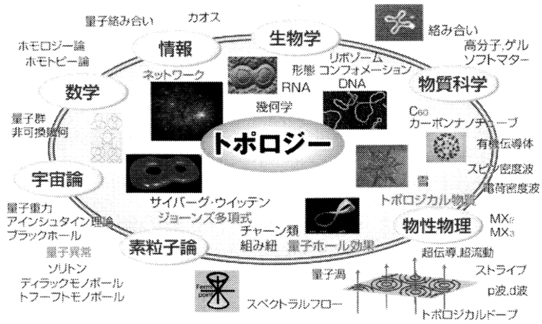


図1　トポロジー理工学の概念図.

2. トポロジーと物性

これまで物性におけるトポロジーの問題は

(1)　ある秩序場のトポロジー的に非自明な古典的配位，例えば，結晶中の点，線，面欠陥，第二種超伝導の渦糸や ^{3}He 超流動体・^{87}Rb ボース・アインシュタイン凝縮中の量子渦などのトポロジカル欠陥が存在する場合，ホモトピー論を使った欠陥の分類，欠陥の安定性，また秩序パラメータそのものの分類を議論すること[1]．

(2)　運動量空間におけるトポロジカルな特異点（最近流行のDirac型フェルミ点）が織り成す量子異常[2～4]，スペクトラルフロー[5]が現れること．

(3)　ベリー位相のように，あるパラメータ空間で断熱的にパラメータを動かしたときに波動関数の位相がその辿る経路に依存しトポロジカルに変化しその結果，偏光性などの物理量変化が現れる現象などがあった[6,7]．

系の大域的な実空間トポロジーが物性そのものに果たして直接影響を与えるものなのか，またそれがトポロジカル欠陥，秩序パラメータの安定性，波動関数空間，運動量空間，配位空間のトポロジーの問題とどのように関わってくるのかに，関心が集まってきている．例えば，メビウスの帯のような裏と表の区別ができない系にイジングスピンをおいたり，クーパーペア，電荷密度波，P 波超伝導体およびグラファイトシートで実現されていると考えられている 2 成分電子系をおくと一体どうなるのであろうか[8~12]？

トポロジーという概念は系の大域的な性質を取り扱うものである．メビウスの帯という空間は，局所的な曲率が例えば円筒面で近似できるとしても，円筒は両側性があり向き付け可能であるが，メビウスの帯は単側性であり向き付け不能な曲面である．明らかに円筒面とはトポロジー的に峻別され，それらは数学的にはトポロジカル不変量の値が異なることとして表現される．そして摂動的な微視的変形とは無関係にトポロジカル不変量を保とうとするトポロジー安定性があり，その安定性が物性としても現れてくることがある．例えば，SQUID（Superconducting quantum interference devices: 超伝導量子干渉計）やジョセフソン電圧計や量子ホール素子のようなデバイスは，理想的な形からはかなりずれている適当な形をしていても非常に精確に測定がなされる．つまり SQUID やジョセフソン電圧計を多少変形しても，数学的に Winding 数で表される磁束の量子化に対応するとびとびの値は変わらないし，縦と横の電極の長さが違う形状をした量子ホール素子における量子ホールコンダクタンス（Chern 数で表される[13]）のとびとびの値は変わらない．Winding 数，Chern 数ともにこれらはトポロジカル不変量であり，この数学的剛性ゆえに物理系における不変定数 $(h/e, e^2/h)$ の係数が整数値として物性に現れてくるのである．それはこれらのデバイスがトポロジカル量子数を使っているからである．トポロジカル量子数は角運動量のような対称性にもとづく通常の量子数よりもっともっと強い剛性があるのである．さらに，金属–絶縁体転移，超伝導–絶縁体転移，超流動–絶縁体転移などのトポロジカル量子数が変わる量子相転移もあり[9,13]実に興味深い，物性物理と幾何学の深い対応があり奥深さを感じる．

3. トポロジカル結晶

そのような背景の下，トポロジカルに非自明な実空間構造をもつ結晶体を作成することに成功したのでそれを報告議論したい．化学気相輸送法により擬 1 次元伝導体の一種である $NbSe_3$, $TaSe_3$ のリング結晶，8 の字結晶，メビウス結晶をそれぞれ作成した．その結晶成長機構は Se の液滴の周りを表面張力により $NbSe_3$ ファイバー結晶がはりつき一周してくっつくことがわかった．これによりリング結晶になることがわかった．さらにメビウス，8 の字結晶は，結晶の内的性質と断面形状により捻られながら結晶成長することにより作成できることがわかった．本稿は主にトポロジカル結晶の成長機構と CDW（Charge density waves: 電荷密度波）のトポロジカル効果を中心に行いたい[14]．

遷移金属トリカルコゲナイド物質 MX_3 は 1 次元性の強い物質群である．通常結晶は非常に細長いリボン状・ホイスカー状をした断面（数 μm × 1μm）長さ数 mm に成長し，その結晶構造は中心に金属原子をもつ 6 つのカルコゲン原子からなる三角柱を基本単位としている．同系の MX_2 も同

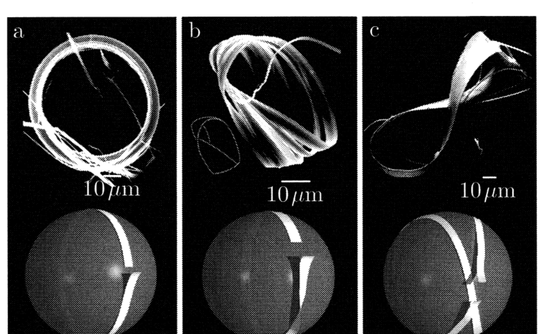


図 2　トポロジカル結晶と生成機構：(a) リング結晶，(b) メビウス結晶，(c) 8 の字結晶．

様に三角柱を基本単位にもつが MX_2 ではそれらが横につながってグラファイトと同様に2次元的に配列するのに対して MX_3 では三角柱チェインどうしが並行に積み重なる構造を形成している．このような結晶構造の特徴から MX_2 では2次元性が MX_3 では1次元的な性質を示すことが期待され多くの低次元研究における典型的物質としての不動の位置を占めている．代表的な MX_3 は異方性の強い超伝導 $TaSe_3$，パイエルス転移を示す TaS_3，CDW 転移を示す $NbSe_3$ と様々な物性を示す．このように低次元系に特有な一連の物性を示す MX_3 系はその「良質単結晶の存在」により，ヨーロッパを中心に流行に左右されない形でしっかり根を下ろした研究が行われている[15]．

我々は，次の4種類のトポロジカル物質を発見している．いずれも電子線回折とX線回折から単相の $NbSe_3$, $TaSe_3$ の単結晶であることがわかった．

(1)　リング結晶：トポロジー的にはリング（円筒）と見なされるが，実際の形状は多彩である．図2(a)のように外形1～90μm の細いものが典型例であるが，円盤や円柱型も存在する．

(2)　メビウス結晶：現在まで数個しか得られていないものの確かに存在していることが図2(b)により示されている．3次元空間に埋めこめられた唯一の向き付け不能なループ結晶の例として特に重要である．

(3)　8の字結晶：このタイプの結晶は，円周に 2π のひねりがあるものとして特徴付けることができる．数字の8の字を形作る事が多い（図2(c)）．周長の平均は480μm であり，リング結晶（280μm）の約2倍である．ツイスト数でいうと 2π である．このように縁（2本の枠線）を持つリボンから作られる閉じたループは，数学の分野では“リボン—ノット”として取り扱われる．上記の3タイプもその分類に従ったものである．

(4)　ホップリンク結晶：この結晶はこれまでの結晶学の分類に収まらない結晶である．ただ埋め込み多様体で分類できる可能性がある（図3）[16]．

これらのループ結晶を FIB（収束イオンビーム）を用いて切断することで[17]，曲げ変形による塑性

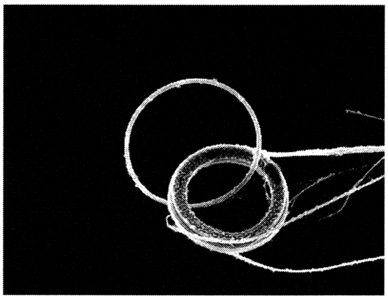


図3　ホップリンク結晶．

の程度を見積もった．その結果，細いループは弾性的に直線形状へと回復する一方，厚み約1μm を境にして，太いものはそのままの形状を保つことが判明した．これは，リング結晶が幅約1μm 単位で，繊維状の完全結晶によるリングと見なせることを意味する．リング結晶が持つ離散的回転対称性は，単なる単結晶を切り出して作製したリングにはないものである．（切り出し，加工リング結晶では離散的並進対称性しかない．）結晶学の表現をとるならば，リング結晶は結晶欠陥によって記述することも可能である．ただし，結晶に普通見られる線欠陥（ディスロケーション）ではなく，液晶に特有であると思われていた回位（ディスクリネーション）を導入しなければならない．リング結晶はその中心に一本のくさび型回位線（大きさは$+2\pi$）を持つ結晶だと言える．メビウス・8の字結晶はくさび形に加え，π あるいは 2π のねじれ型回位を持つ．別の見方をすれば結晶全体がディスクリネーションになっている結晶といえる[18,19]．

次に，我々の研究室で合成されたリング，メビウス，8の字結晶の成長機構について論じる．テンプレート型のトポロジカル結晶成長である．リング結晶に関しては，$NbSe_3$ ホイスカー（ひげ結晶と呼ばれる細長い結晶）のような繊維状の物質が何かに巻きついて成長することで形成できる．Nb（ニオブ）と Se（セレン）の気相反応中にそのような状況が起こることを発見した．通常，この種の結晶作成法では，沸点の低いセレンが反応容器中を蒸発・凝集しながら循環し，反応によって生じた $NbSe_3$ 分子を一箇所に集めて結晶化させることが

できる．そうしてできる $NbSe_3$ の微小なホイスカーが付近のセレン液滴と接触すると，表面張力により液滴表面に吸着する．その結果，図 2 (a) の写真のように，液滴に巻きつくループとなる．液滴が蒸発すると，ループだけが残り得る．次に 8 の字結晶に関しては，周長がリングのおよそ倍であることから Se 液滴を 2 周回った後に両端が結合することで形成されると考えられる．液滴に 2 回巻き付けるだけで 2π のひねりを持つ 8 の字を作れるのは少し不思議だが，テープとはさみを用意して実際にやってみれば明らかであろう．数学的には，テープの縁の線に着目し，2 本の線どうしの絡み合いの数を lk（リンキング数）と定義するとき，

$$\mathrm{Wr} + \mathrm{Tw} = \mathrm{lk}$$

の関係式が成立する[20~22]．Wr（ライジング数）は 1 回巻き付けるごとに 1，Tw（ツイスト数）は 2π のひねりに対して 1 の整数である．球体に 2 回巻きつけたものは Wr=2，Tw=0，lk=2 であるのに対して，図 2 (c) に写っている 8 の字に関しては Wr=1，Tw=1，lk=2 となっている．つまりトポロジー不変量である lk に注目すると，どちらも数学的には同じものである．物理的には，同じトポロジークラスに属する形状のうち，曲げによる弾性エネルギーが最小のものが選択されるはずである．観察された lk=2 の結晶は 8 の字型が多いことから，どこかで（例えば Se の球が蒸発するときに）ライジング–ツイスト変換が起こると考えられる．メビウス結晶に関しては，次のメカニズムがわかった．図 2 (b) のように，Se 球面を $NbSe_3$ が這う際，曲がりながらツイストが入ることが明らかになった．表面張力で $NbSe_3$ が曲がっていくのであるが，その際，結晶断面が矩形であるとランダウ，ハーモンの弾性体論によれば捻られるのである[23,24]．この場合勿論どちらに捻られるかは対称性の破れと同じでどちらにもなり得る．この結晶が捩れを伴いやすいもう一つの理由は単斜晶（P1/m2）であることが掲げられる．つまり，単斜晶系においてはフックの法則を拡張した弾性体論を結晶学に適用した場合，歪と応力の間のコンプライアンス行列のシェアの項に非対角項が存在する．例えば S_{35} があるとする．この項の意味は x 面に対して z 方向にシェア変位をさせた場合，z 面が z 方向に力が働くのである．この項が 0 であればそのような力は働かず結晶を曲げていった場合捩れは起こらない．もし有限であれば曲がりとともに捩れることになる．単斜晶であるから必ず捩れる方向に力が働く．この場合は勿論結晶断面が矩形でなくても何でもよい．いずれにしてもこの 2 種類の効果により $NbSe_3$ の曲げは常にひねりを伴っていると思われる．一周巻き付けたところでちょうど π のひねりが生じていた場合，メビウスの結晶ができあがる．ひねりの大きさは場合により異なる．例えばホイスカーが太すぎるとねじれの弾性エネルギーが大きいため，ひねりは無視できる程度になるだろう．メビウス結晶の生成がリング・8 の字より希少であるのは，曲げ変形とひねり変形の偶然の一致に依存する部分があるためと思われる．他にも液体 Se の球の回転も考えられるが，まだ観測してはいない．これまでに見つかったトポロジカル物質を，次の 3 種類に分類した．ひねりなし・π ひねり（メビウスの輪）・π ひねりの 3 つで，巻きつきの過程で生じたひねりによって分類する．各タイプごとに，ホイスカーが液滴にどのように巻きつけば形成できるかを図 2 にまとめた．

4. トポロジカル物性

次に電気的測定に移る．実際の系におけるトポロジーの変化が物性に影響を及ぼし，トポロジカルな効果がでるかどうかは非常に重要な問題である．理論的には，CDW の AB 効果[25]や，AC 効果[26]が予言されているがいまだ決着はみていない．なぜなら結晶を加工することで CDW リングを作るのは不可能だからである．TaS_3 のリング結晶では CDW リングが自己形成するため，まさに理想的な CDW 干渉系になっている．このリングに関して AB 効果が起きるかどうか確かめた．磁場

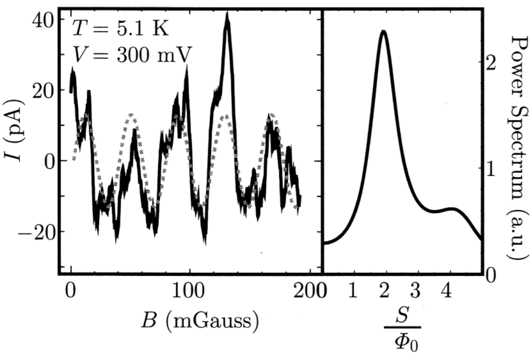


図 4 TaS_3 リングにおける CDW の AB 効果，横軸は磁場であり明らかに周期が観測される．周期 ϕ_0 はパワースペクトルから $h/2e$ でありCDWのソリトン励起（電荷 $2e$）由来の干渉と考えられる．

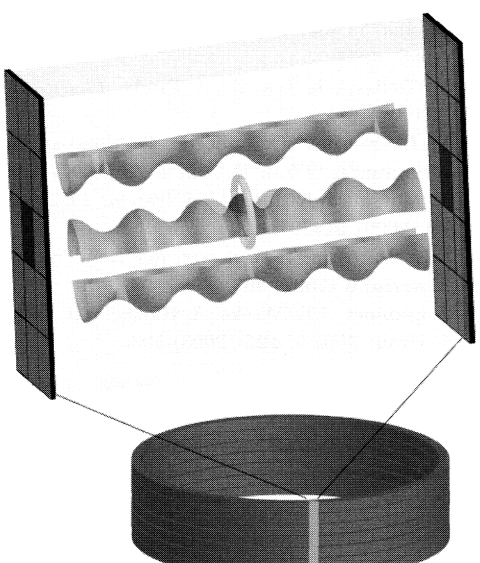


図 5 CDWディスロケーションループモデル．波は結晶中に生じているCDWを表している．ソリトンとしてディスロケーション（ループ状）に囲まれた余分な波面が励起している．

をかけ電気抵抗を測ったところ，$h/2e$ の周期で振動しているのがわかった（図 4）[27]．ここで現れる $2e$ という電荷はソリトン励起に起因するものと考えられる．余分に追加されたCDWの波面（位相ひずみ）が干渉を起こすというモデルを図5に示す．CDWの干渉はこれまでにフランスのモンソウのグループが重イオンを $NbSe_3$ 短冊結晶に貫通させそのスライディング状態でAB干渉効果[28]をみているが解釈がまちまちである．リング周りの準粒子がAAS効果のように干渉しているとみるのが妥当である．

一方，$NbSe_3$ のリング結晶に直流と交流を同時に印加することでシャピロステップを観測した[29]．CDWリングではメインのシャピロピークに加えてサイドにビートピークが現れた．この共鳴条件のずれは，CDWが循環して流れるという効果を考慮しなければ説明が付かない．我々のデータは理想的CDWリング系における実験のため，CDWそのものの干渉を見ている可能性もあり重要な知見を与えている．室温でもCDWは形成されるため，トポロジカル結晶を用いたCDWのAB効果やCDW還流の発見は，室温フレーリッヒ超伝導や新しい量子干渉デバイスの実現の可能性も示唆しており多様な分野への発展が期待できる．

5. 実証的トポロジー科学

まだこれらの系に関する実験は始まったばかりである．他に電子的なトポロジカルな効果はあるのかないのかは急務な課題である．結晶学的にもメビウス結晶の最適な形はどういったものか，今後の課題でもある[30]．ナノテクノロジーの急先鋒であるナノチューブの作製メカニズムがまだはっきりしていない現状を考えると同じ2次元層状化合物，さらに可塑性のある1次元化合物によるこのようなトポロジカル結晶の成長メカニズムが明らかになったことは創成の指導原理を与えたという意味においても，新しい物性を引き出す場を与えたという意味において非常に重要である．これらは物理学，数学，化学，生物学，鉱物学分野を巻き込む可能性もあり多くの人がこの分野に参入することを望んでおります（図1参照）．

物性だけでなく，宇宙の大域的トポロジー構造がビッグバン後に現れる素粒子の種類を決める可能性も示唆されており系の大域的トポロジーが宇宙物理分野にも確実に重要な位置を築きつつある．宇宙では大域的トポロジーは変えられないので実験はできないが，物性系は実験ができるという点で

優れている[31]．実験室系を使って宇宙を語る日も近いと考える．（Cosmology in Laboratory: ヨーロッパではこの研究が始まっている．）

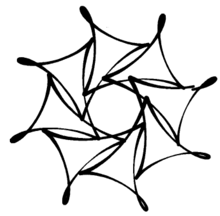
最後に，本研究を遂行するのに，多くの支援を受けました．実験では，常田琢氏，松浦徹氏，豊島剛氏，稲垣克彦氏，山谷和彦氏，故三本木孝氏，市村晃一氏，川本温子氏，岡島吉俊氏，塩原正人氏，安塚周磨氏，砂川一郎氏にお世話になりました．それから，広島大学の畠中憲之氏，秋田大学の林正彦氏，奈良教育大の松山豊樹氏，立命館大学の倉辻比呂志氏，南カリフォニア大の故真木和実氏，日本大学の山中雅則氏，京大の吉川研一氏，NEC の飯島澄雄氏，白河英樹氏，東京大学の青木秀夫氏，MIT の Jackiw 氏，Bristol 大学の Berry 卿，ヘルシンキ工科大低温物理研の Volovik 氏，Hakonen 氏，Paalanen 所長をはじめ多くの方々に議論して頂きました．この場を借りて謝辞とします．

参考文献

1) N.D. Mermin: *Rev. Mod. Phys.* **51** (1979) 591.
2) R. Jackiw: *Phys. Rev. D* **29** (1984) 2375.
3) A. Niemi and G. Semenoff: *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 2077.
4) T. Matsuyama: *Prog. Theor. Phys.* **77** (1987) 711.
5) 田中秋広，林正彦：固体物理 **35**, No.1 (2000) 50.
6) M.V. Berry: *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A* **392** (1984) 45.
7) 倉辻比呂志：『幾何学的量子力学』，シュプリンガー・ジャパン (2005).
8) M. Hayashi and H. Ebisawa: *J. Phys. Soc. Jpn.* **70** (2001) 3495.
9) G.E. Volovik: *Exotic Properties of Superfluid* ^3He (World Scientific, 1992).
10) H. Ito and T. Sakaguchi: *Phys. Lett. A* **160** (1991) 424.
11) K. Kaneda and Y. Okabe: *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 2134.
12) F. Mila, C. Stafford, and S. Capponi: *Phys. Rev. B* **57** (1998) 1457.
13) D. Thouless: *Topological Quantum Numbers in Nonrelativistic Physics* (World Scientific 1998).
14) S. Tanda, T. Tsuneta, Y. Okajima, K. Inagaki, K. Yamaya, and N. Hatakenaka: *Nature* **417** (2002) 397.
15) For reviews on CDWs, see P. Monceau: *Electronic Properties of Inorganic Quasi-One-Dimensional Compounds* (Reidel, 1985).
16) T. Matsuura, M. Yamanaka, N. Hatakenaka, T. Matsuyama, S. Tanda: *J. Crys. Grow.* **297** (2006) 157.
17) T. Matsuura, T. Tsuneta, K. Inagaki, S. Tanda: *Phys. Rev. B* **73** (2006) 165118.
18) W.F. Harris: Surf. Defect Prop. Solids: *a Specialist Periodical Report* **3** (1974) 57.
19) M. Hayashi, H. Ebisawa, K. Kuboki: *Europhys. Lett.* **76** (2006) 264.
20) J.H. White: *J. Math.* **91** (1969) 693.
21) A.V. Vologodskii, V.V. Anshelevich, A.V. Lukashin, and M.D. Frank-Kamenetskii: *Nature* **280** (1979) 294.
22) H. Tsuru and M. Wadati: *Biopolymers* **25** (1986) 2083.
23) L.D. Landau and E.M. Lifshitz: *Theory of Elasticity* (Pergamon Press, 1959).
24) R.F.S. Hearmon: *An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity* (Oxford Univ. Press, 1961).
25) E.N. Bogachek, I.V. Krive, I.O. Kulik, and A.S. Rozhavsky: *Phys. Rev. B* **42** (1990) 7614.
26) Ya-Sha Yi and A.R. Bishop: *Phys. Rev. B* **58** (1998) 4077.
27) M. Tsubota, K. Inagaki, S. Tanda: *Physica B* **404** (2009) 416.
28) Yu.I. Latyshev, O. Laborde, P. Monceau and S. Klaumünzer: *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 919.
29) T. Matsuura, K. Inagaki, S. Tanda: *Phys. Rev. B* **79** (2009) 014304.
30) E.L. Starostin, G.H.M. van der Heijden: *Nature Material* **6** (2007) 563.
31) J. Luminet, J.R. Weeks, A. Riazuelo, R. Lehoucq, J. Uzan: *Nature* **425** (2003) 593.

（たんだ・さとし，北海道大学大学院工学研究科，トポロジー理工学の創成 COE）
（つぼた・まさかつ，北海道大学大学院工学研究科，日本学術振興会特別研究員）

経済均衡の幾何学



丸山　徹

1. 経済の均衡

日々の生活の中に生起する経済現象は無数にあり，またそれを解明する経済理論の様相も実に多様である．しかし現代の経済理論には個々具体的な問題の相違を越えて，経済現象を把握する一貫した共通感覚(コモン・センス)があるように思われる．

まず経済の舞台には非常に多数の主体が存在し，その各(おのおの)が各種の制約に服しながら，自分の目標をできる限り十分に達成すべく合理的に行動するものと考えてみよう．しかし経済には，多数の主体の利己的な行動を調整・整合して，経済に一種の調和的なバランスをもたらす仕かけが内在しており，我々が日々観察する諸商品の取引量や価格など，経済活動のありさまは，多数の主体の選択行動がこの「見えざる手」によって調整された，いわば経済の均衡＝平衡状態において定まるものと想定するのである．このような視角から現象の解明に迫ろうとするところに，L. Walras[1)]以来今日に到る経済分析の共通感覚を読みとることができる．

この考え方を一層具体的に示すために，生産活動は全く行なわれず，各主体が手持の諸商品を互いに交換するという，きわめて単純な経済を想定し，価格や取引量の決定メカニズムを概観してみよう．甚だ非現実的な話のようであるが，この方がかえって分析の基本的性格を明澄に理解していただくのに役立つと思われる．

2. 基本モデル

経済に存在する財の種類を l 種とし，それを $j(=1,2,\cdots,l)$ という記号で区別する．また主体の数は m 人とし，それを $i(=1,2,\cdots,m)$ という記号で表示することにしよう．

消費計画は l 個の座標をもつベクトル $x=(x_1, x_2,\cdots,x_l)$ として表すことができる．各 x_j は第 j 財の消費量で，これはゼロ以上と考えるのが自然であろう．

各主体 i は消費計画に対する**選好**の序列を有し，それは任意の二つの消費計画の間に定義される擬順序（推移律・反射律を満たす二項関係）$\precsim^i$ で表されるものとしよう．各主体 i の選好擬順序 $\precsim^i$ に対して

$$u^i(x) \leqq u^i(y) \iff x \precsim^i y$$

を満たす実数値函数 u^i が存在することを仮定し，これを $\precsim^i$ を表現する**効用函数**と呼ぶ．つまり効用函数とは，選好の擬順序を実数の大小を以て表現する函数にほかならない．

また各主体は交換に先立ってあらかじめ何種類かの財を保有するものとし，それは自家用の消費にあてることもできれば，また売却して他の財を購入するための購買力として用いることもできるとしよう．主体 i が l 種の財を当初に何程ずつもっているかを特定化したベクトルを**初期保有量ベクトル**と呼んで，これを $\omega^i=(\omega^i_1,\omega^i_2,\cdots,\omega^i_l)$ と

書く．

価格ベクトル $p = (p_1, p_2, \cdots, p_l)$ の下で，当初保有する財を全部売却したときの価値額は $\sum_{j=1}^{l} p_j \omega_j^i$ であり，これは主体 i の，価格 p の下での購買力の上限を定める．一方，価格 p の下で消費計画 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_l)$ を購入しようとすれば，そのための支出は $\sum_{j=1}^{l} p_j x_j$ にほかならない．しかしこの額は購買力の大きさを越えることができないから，消費計画 x は不等式 $\sum_{j=1}^{l} p_j x_j \leqq \sum_{j=1}^{l} p_j \omega_j^i$ を満たすように選ばれねばならないであろう．これが主体 i の予算の制約である．

こうすれば消費者（主体）の行動を説明する基本仮説は

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} \quad u^i(x) \\ &\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{l} p_j x_j \leqq \sum_{j=1}^{l} p_j \omega_j^i \end{aligned}$$

と要約することができる．この最大化問題を解けば，価格 p の下における主体 i の最適消費計画 $\xi^i(p)$ が定まる．この函数 $p \mapsto \xi^i(p)$ をこの主体の**需要函数**と称する．需要函数の性質として，次の二点に留意しておこう．

(i) $\xi^i(p)$ はゼロ次の同次函数である．つまり，任意の正数 α に対して，$\xi^i(\alpha p) = \xi^i(p)$ が成り立つ．

これは価格 p の下での予算制約と価格 αp の下でのそれが同一であることから明白である，またたとえば[*1] $x \leqq y$, $x \neq y$ なる二つの消費計画について $u^i(x) < u^i(y)$（単調性）を仮定すれば，

(ii) 最適消費計画 $\xi^i(p)$ において，予算制約は等号で成り立つ．つまり $\sum_{j=1}^{l} p_j \xi_j^i(p) = \sum_{j=1}^{l} p_j \omega_j^i$ である．

各主体の需要函数 $\xi^i(p)$ を合計し，$\sum_{i=1}^{m} \xi^i(p)$ を求めると，これは社会のいわば総需要函数で，価格 p の下で，各財が合計で何程欲せられているかを表している．これに対して，経済に存在する各財の総量を示すベクトルは $\sum_{i=1}^{m} \omega^i$ である．

*1） $x, y \in \mathbb{R}^l$ に対して，$x_j \leqq y_j$ がすべての $j = 1, 2, \cdots, l$ について成り立つとき，$x \leqq y$ と表記する．

$\zeta(p) = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(p) - \sum_{i=1}^{m} \omega^i$ と定義される函数を**超過需要函数**と称する．ある価格の下で

$$\zeta(p) = 0, \text{ つまり } \sum_{i=1}^{m} \xi^i(p) = \sum_{i=1}^{m} \omega^i$$

が成り立つならば，すべての財の総需要と総供給がちょうど等しくなり，各主体が価格 p の下で売りたいだけの量を売り，買いたいだけの量を買うと，きれいに市場がクリアーされることになる．このとき経済は**一般均衡**の状態にあると言い，このような価格 p を一般均衡価格ベクトルと呼ぶ．ある価格ベクトルの下で，すべての主体が自分にとって最も合理的な選択をし，かつすべての財の需給が釣り合って過不足のない状態——これが一般均衡の状態である．

一般均衡は次のように定義される場合もある．

(i) $\zeta(p) \leqq 0$，かつ

(ii) $\zeta_j(p) < 0 \Rightarrow p_j = 0$.

超過需要函数についても，次の二つの性質が成り立つ．

(i) ゼロ次の同次性．つまり任意の正数 α に対して $\zeta(\alpha p) = \zeta(p)$.

(ii) $\sum_{j=1}^{l} p_j \zeta_j(p) \leqq 0$ for all p.（**Walras 法則**）

これは各主体の予算制約をすべて加え合せることによって得られる．さらにたとえば選好の単調性の下では

(ii′) $\sum_{j=1}^{l} p_j \zeta_j(p) = 0$ for all p.（狭義の Walras 法則）

3. 均衡の存在

現実の経済現象に迫るために，我々は基本モデル（＝実験装置）における均衡が実現するメカニズムを研究し，また均衡の性質を調べ，さらにはモデルの構造を変えたときに均衡がいかに変化するか…等々といった事柄をひとつひとつチェックし，現実の現象と照合してゆかねばならない．

しかし何よりもまず，現実の現象をモデルの均衡に擬して考える試みが空虚でないためには，モデルに均衡が存在しなければならないのは理の当

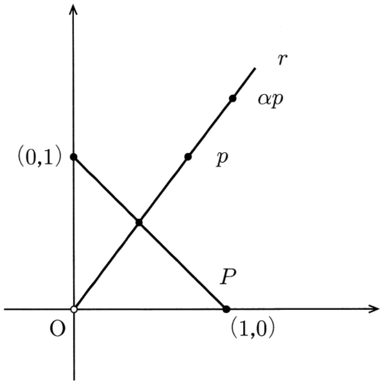


図 1　価格の半直線と基本単体.

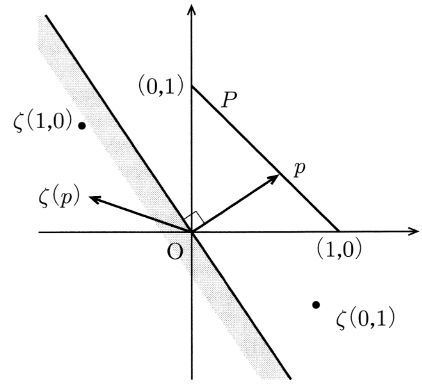


図 2　Walras 法則.

然である．そこで一般均衡の存在証明の考え方に直感的な説明を与えておこう[2)]．

まず，超過需要函数のゼロ次同次性を思い起こしていただきたい．図 1 を見よう．原点を始点とし，p を通る半直線 r 上の価格ベクトル（ただし 0 を除く）は，いずれも同じ値の超過需要を与えるという意味で同一視することができる．そこで均衡価格を求める我々の目的のためには，この半直線 r 上のすべての価格を考えるかわりに，その代表元として，たとえば基本単体

$$P = \left\{ p \in \mathbb{R}^l \,\middle|\, \sum_{j=1}^{l} p_j = 1,\ p_j \geqq 0 \right\}$$

と r との交点だけを考えていけば足りる．このような根拠で，均衡価格ベクトルの探索範囲は $\mathbb{R}^l$ の基本単体 P に限定して考えることができる．

図による説明を可能とするために $l = 2$ とする．いま超過需要函数 ζ は P 上で連続であり，しかも Walras 法則 $p_1\zeta_1(p) + p_2\zeta_2(p) = \langle p, \zeta(p)\rangle \leqq 0$ (for all $p \in P$) が成り立つものとする．（ここで $\langle p, \zeta(p)\rangle$ は p と $\zeta(p)$ との内積.）このとき，$\zeta(p^*) \leqq 0$ を満たす $p^* \in P$ が存在することを，次のようにして示すことができる．図 2 を見ながら考えよう．

$(1,0)$ を振り出しとし，$(0,1)$ に到るまで価格ベクトル p を連続的に変化させたとき，それに応ずる $\zeta(p)$ の動きを見よう．まず $p = (1,0)$ のとき，$\zeta(1,0)$ の存在範囲は，Walras 法則により，縦軸の左側（第二，第三象限）である．$\zeta(1,0)$ がたまたま第三象限に位置すれば，もはや証明すべきことは何もないであろう．$p^* = (1,0)$ として確かに $\zeta(p^*) \leqq 0$ となるからである．そこで $\zeta(1,0)$ が第二象限にある場合について考えればよい．

$p = (0,1)$ の場合も同じように考えてみると，$\zeta(0,1)$ の存在範囲は横軸の下側（第三，第四象限）である．もし $\zeta(p)$ が第三象限に位置すれば，$p^* = (0,1)$ とすればよいのであるから，結局 $\zeta(0,1)$ が第四象限にある場合だけを考えてゆけばよいことになる．

いま p が $(1,0)$ から $(0,1)$ へ連続的に変化してゆくとき，ζ の連続性により，$\zeta(p)$ も平面上を連続的に運動してゆくわけであるが，その際，Walras 法則により，p と $\zeta(p)$ の成す角は常に直角または鈍角でなければならぬ．$\zeta(1,0)$ に発した $\zeta(p)$ の動きが，この規約を守りながら $\zeta(0,1)$ に達するためには，どうしても第三象限を通過せざるを得ない．つまり $\zeta(p^*) \leqq 0$ を満たす $p^* \in P$ が必ず存在するのである．

ここでさらに条件を強めて狭義の Walras 法則（すべての $p \in P$ に対して $\sum_{j=1}^{l} p_j\zeta_j(p) = 0$）の成り立つことを仮定すれば

$$\zeta_j(p^*) < 0 \implies p_j^* = 0$$

となることは自明である．こうして p^* こそはまぎれもない一般均衡価格ベクトルであることが知られたわけである．

このスケッチではっきりしたと思うが，均衡の存在証明にあたって大切なポイントは (1) 超過需要

函数 ζ の連続性と (2) Walras 法則の二つである．より一般的な設定で考える場合には ζ が通常の函数ではなく“多価”とみなすのが自然である．この場合には，$\zeta(p^*) \leqq 0$ のかわりに $\zeta(p^*) \cap \mathbb{R}^l_- \neq \emptyset$ ($\mathbb{R}^l_-$ はすべての座標がゼロまたは負であるベクトルの集合）を満たす $p^* \in P$ の存在を示すのが証明の第一段階となるべきであろう．そして次に狭義の Walras 法則（任意の $p \in P$ と $z \in \zeta(p)$ に対して $\sum_{j=1}^l p_j z_j = 0$）の成り立つ条件を考察し，あとは上記のスケッチと全く同様の手続きで進めばよいのである．

そして ζ が多価の場合に，$\zeta(p^*) \cap \mathbb{R}^l_- \neq \emptyset$ を満たす $p^* \in P$ を見出すためには，位相幾何学の分野から角谷静夫に負う不動点定理を援用しなければならない．

角谷の不動点定理[3]　K を $\mathbb{R}^l$ の非空・コンパクト・凸集合とし，多価写像 $\Gamma : K \twoheadrightarrow K$ は次の二条件を満たすものとする．(i) すべての $x \in K$ に対して $\Gamma(x)$ は非空・コンパクト・凸集合．(ii) Γ のグラフ $\{(x,y) \in K \times K \mid y \in \Gamma(x)\}$ は閉集合．このとき $x^* \in \Gamma(x^*)$ なる $x^* \in K$ が存在する．[ここで二重矢印 $\twoheadrightarrow$ は，多価写像の定義域と値域を示す記号である．]

また $\zeta(p^*) \cap \mathbb{R}^l_- \neq \emptyset$ なる $p^* \in P$ の存在証明は D. Gale や二階堂副包らの数理経済学者によって 1950 年代に得られたのであるが，これは 1968 年に F. Browder が無限次元の空間を対象に導いた所謂変分不等式を，有限次元の場合に先取りする成果であった．

Browder の変分不等式[4]　K を線形ノルム空間 $\mathscr{X}$ の非空・コンパクト・凸集合，$\Gamma : K \twoheadrightarrow \mathscr{X}'$ ($\mathscr{X}$ の双対空間．位相は作用素ノルムによる）は次の二条件を満たすものとする．(i) すべての $x \in K$ に対して $\Gamma(x)$ は非空・コンパクト・凸集合．(ii) Γ の優半連続*2)．このときすべての $y \in K$ に対して $\Lambda^*(x^* - y) \geqq 0$ を満たす $x^*x^* \in K$ と $\Lambda^* \in \Gamma(x^*)$ とが存在する．

4. 均衡の多様体

一つの経済の均衡を決定する基本要因を“経済の構造”と呼ぶことにすれば，上記の簡単な交換経済における経済の構造は（イ）経済主体の集合 I,（ロ）各主体の選好の擬順序 $\precsim^i$ またはそれを表現する効用函数 u^i,（ハ）各主体の初期保有量ベクトル ω^i を特定化することによって決定される．いま一つの経済構造 $e = \{\precsim^i, \omega^i\}_{i \in I}$ が与えられたときに，この経済における一般均衡価格ベクトルの集合を $E(e)$ と書くことにすれば，均衡集合 $E(e)$ の性質を詳かにすることが，経済学の大切な課題である．ただし今後 $E(e)$ は $\mathbb{R}^l$ の基本単体 P に含まれるものとする．

緩い仮定の下で均衡集合 $E(e)$ の非空なることが示されたとしても，$E(e)$ には多数の点が含まれているかもしれない．このような場合には $E(e)$ に属する点のうち，いずれが実現するかは全く不定のまま留め置かれねばならないのであって，それを理論の内部で説明し尽くすことはできない．もちろん均衡が一意的であるならばこのような問題は氷解するが，これはきわめて限定的な条件の下でのみ成り立つのであって，それを具備する理論モデルに分析対象を制限したのでは，あまりに理論の守備範囲を狭める結果になるであろう．

そこで，G. Debreu[5] は条件を緩和して $E(e)$ の局所的な一意性，すなわち $E(e)$ の離散性の条件を追求し，併せてこの性質が分析上許容される様々な経済構造の中で，どの程度の一般性を以て成り立つかという問題に斬新な結果を与え，この方向での研究の嚆矢となった．また多価函数 $e \mapsto\!\!\!\!\rightarrow E(e)$ の幾何学的研究の果たす役割もきわめて大きい．

さて簡単化のために，経済構造を定める要因のうち，主体の集合 I, 各主体の選好 $\precsim^i$ は固定されたものとし，購買力を定める初期保有量ベクトル ω^i だけ

*2)　$x_0 \in K$ とし，$\Gamma(x_0)$ の任意の近傍 V に対して，x_0 の近傍 U を適当に選び

$$\Gamma(x) \subset V \text{ for all } x \in U$$

となしうるとき，Γ は x_0 において**優半連続**であるという．上記の定理ではこれがすべての $x \in K$ のおいて成り立つと仮定するのである．

を $\Omega = \mathrm{int}.\mathbb{R}^l_+$（つまり座標がすべて正であるベクトルの集合）の中で可変的とする．したがってこの経済の構造は（不変な I や $\precsim^i$ は明示せず）初期保有量ベクトルのリスト $e = (\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^m) \in \Omega^m$ によって表されるものと考えてよい．

先の議論では各価格 p に対して問題

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} \quad u^i(x) \\ &\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{l} p_j x_j \leqq \sum_{j=1}^{l} p_j \omega_j^i \end{aligned}$$

を解くことによって，p の函数としての需要函数 $\xi^i(p)$ を導入したのであった．しかしここでは p ばかりでなく ω^i をも可変的と考え，これが需要量に与える影響をみたいので，需要函数の独立変数としては p のほかに ω^i をも斟酌しなければならないであろう．そこで最適な需要ベクトルは p と購買力の大きさ w^i（正の実数）とに依存して決まることを明示して，需要函数を $\xi^i(p, w^i)$ と書くことにしよう．p の変域は $\mathring{P} = \{p \in \Omega \mid \sum_{j=1}^{l} p_j = 1\}$ とすれば，$\xi^i : \mathring{P} \times \mathrm{int}.\mathbb{R} \to \mathbb{R}^l_+$ で，（$\precsim^i$ が固定されているから）ξ^i も固定されたものとなる．

需要函数 ξ^i については以下の仮定をおく．

仮定 1　すべての $i \in I$ について，ξ^i は一価で，しかも連続微分可能である．

仮定 2　すべての $i \in I$ とすべての $(p, w^i) \in \mathring{P} \times \mathrm{int}.\mathbb{R}_+$ について $\langle p, \xi^i(p, w^i) \rangle = w^i$ が成り立つ．

仮定 3　ある $i \in I$ について，$\mathring{P} \times \mathrm{int}.\mathbb{R}_+$ の点列 $\{(p_n, w_n^i)\}$ が $(\mathrm{cl}.\mathring{P} \backslash \mathring{P}) \times \mathrm{int}.\mathbb{R}_+$ の一点 (p_0, w_0) に収束するとき，$||\xi^i(p_n, w_n^i)|| \to +\infty (\text{as } n \to \infty)$.

$e = (\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^m) \in \Omega^m$ が与えられたとき，$\sum_{i=1}^{m} \xi^i(p, \langle p, \omega^i \rangle) = \sum_{i=1}^{m} \omega^i$ を満たす $p \in \mathring{P}$ が e の一般均衡価格ベクトルであり，その集合を $E(e)$ と書くのである．仮定 1～2 の下において P の中に均衡価格が存在することは前節で述べたとおりである．しかも仮定 3 によれば均衡価格は $\mathring{P}$ に属する．$E(e) \neq \emptyset$ であり，多価写像 $E : \Omega \twoheadrightarrow \mathring{P}$ を **Walras 写像**と呼ぶ．

さて仮定 1～3 の下において，$E(e)$ が無限集合となるような $e \in \Omega^m$ の集合の，（Ω^m における）閉包は Lebesgue 測度ゼロである．Debreu に負うこの結果は，古典的な逆函数定理と A. Sard の定理に立脚して証明することができる．

Sard の定理[6]　U を $\mathbb{R}^l$ の開集合とし，函数 $f : U \to \mathbb{R}^l$ は連続微分可能とする．このとき f の臨界値の集合は $\mathbb{R}^l$ において Lebesgue 測度ゼロである．

次に経済構造 e の変化が均衡の位置をいかに変位せしめるか，経済学に所謂**比較静学**の問題を考えてみよう．

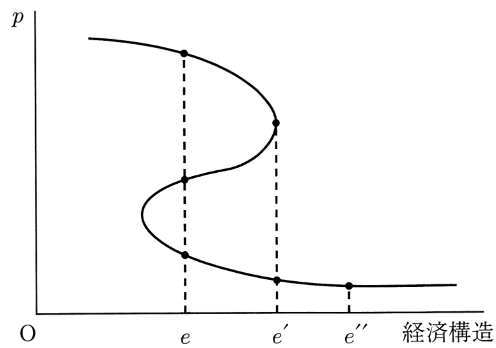


図 3　Walras 写像．

いまごく直感的な理解を図るために横軸に経済構造を測り，縦軸に価格を測ることにすると，Walras 写像のグラフは図 3 の如き一条の曲線として表すことができるであろう．たとえば経済構造が e の場合には，それに対応する均衡価格ベクトルは三組存在し，e' に対しては二組，また e'' に対しては一組だけ存在することを，この図は示している．やや極端な例として，下の 2 枚の図を見よう．

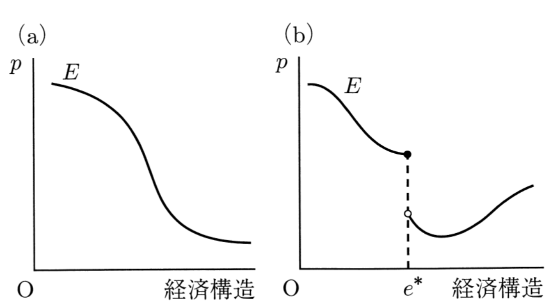


図 4　(a) Walras 写像が連続の場合，(b) Walras 写像が不連続の場合．

図 4(a) の場合は Walras 写像が連続であるのに対して，図 4(b) では e^* において不連続性が生じている．図 4(a) の場合には，経済構造がわずかに変化しても，その結果生じる均衡価格の変位もあまり大きくない．他方，図 4(b) の場合には，たとえば経済構造が e^* からわずかに右方へ変化したとすると，それに伴う均衡価格の変位は相当に大きいのである．

いま実際の経済構造のありさまを何らかの仕方で推定し，Walras 写像の形状に基づいて，その経済構造の下で生ずる均衡の位置を予見するという問題を考えてみよう．図 4(a) のような場合には，e についての推定がやや狂ったとしても，その誤差が小さければ，均衡点の推定誤差も小さいであろう．だが図 4(b) の場合は，随分と状況が異なる．e についての推定がほんのわずか狂っただけで，その結果として，均衡点の推定に大幅な誤差が生じ得るのである．

Walras 写像の連続性はいかなる条件の下で保証されるのか．もし不連続点が発生するとすれば，その頻度はどの程度か．この問題に理論的な見通しをつけておくことは，上記のような比較静学の基礎にかかわる反省に鑑みて，避けて通ることのできない重要な意義を帯びているのである．

一般性を失うことなく，主体 $i=1$ が仮定 3 を満たすものと想定し，各 $v=(p,w^1,\omega^2,\cdots,\omega^m)\in \mathring{P}\times \mathrm{int}.\mathbb{R}_+\times \Omega^{m-1}$ に対して

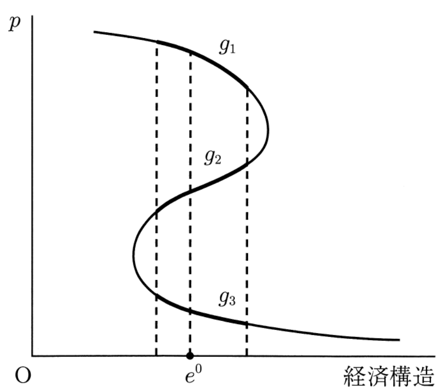


図 5　Debreu の定理.

$$\omega^1=\xi^1(p,w^1)+\sum_{i=2}^{m}\xi^i(p,\langle p,\omega^i\rangle)-\sum_{i=2}^{m}\omega^i$$

とし，函数 $f:\mathring{P}\times \mathrm{int}.\mathbb{R}_+\times \Omega^{m-1}\to \mathbb{R}^{lm}$ を $f(v)=(\omega^1,\omega^2,\cdots,\omega^m)$ と定義する．

こうすると再び仮定 1～3 の下で，Debreu[7] による次の事実を証明することができる．$e^0\in\Omega$ を上で定義した函数 f の正則値とすれば，e^0 の適当な開近傍 G と有限個の連続微分可能な函数 $g_\theta : G\to \mathring{P}(\theta=1,2,\cdots,k)$ を選び $E(e)=\{g_1(e),g_2(e),\cdots,g_k(e)\}$ (for all $e\in G$) とすることができる[8]（図 5 を参照）．

注と参考文献

1) L. Walras, *Eléments d'économie politique pure*, (Corbaz, Lausanne) 1874/1877.
2) G. Debreu, *Theory of Value*, (Wiley, New York) 1959 の Chap.6 が最も重要な基本文献である．丸山訳『価値の理論』（東洋経済新報社）1977.
3) S. Kakutani, "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem", *Duke Math. J.*, **8** (1941), 457–459.
4) F. Browder, "The Fixed Point Theory of Multi-valued Mappings in Topological Vector Spaces", *Math. Ann.*, **177** (1968), 283–301.
5) G. Debreu, "Economies with a Finite Set of Equilibria", *Econometrica*, **38** (1970), 387–392.
6) R. Abraham, J.E. Marsden and T. Ratiu, *Manifolds Tensor Analysis, and Applications*, (Addison–Wesley, Reading) 1983, Appendix E を見よ．
7) G. Debreu 前掲論文.
8) 経済構造の可変的要因として，たとえば，効用函数や生産の技術を表現する生産函数などを含めると，議論は無限次元の微分可能多様体を扱うことになるので，やや複雑化する．S. Smale, "Global Analysis and Economics IIA: Extension of a Theorem of Debreu", *Journal of Mathematical Economics*, **1** (1974), 1–14. および同じ著者の "An Infinite Dimensional Version of Sard's Theorem", *American Journal of Mathematics*, **87** (1965), 861–866. 関連文献として 6) に掲げた R. Abraham *et al.* の著作および R. Abraham and J. Robbin, *Transversal Mappings and Flows*, (Benjamin, New York), 1967.
9) 本稿の内容をより詳しく知りたい読者には丸山徹『数理経済学の方法』（創文社）1995，第 10 章を参照していただきたい．

（まるやま・とおる，慶應義塾大学経済学部）

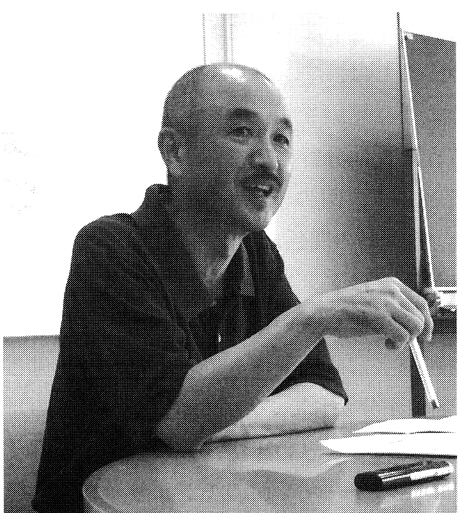
幾何学は自由奔放

小島 定吉（聞き手：編集部）

1. 幾何学は今どうなっているか

――ここ数年はポアンカレ予想の話題など，幾何学の進展が非常に注目されていると思いますが，現在の全体的な研究状況などをお聞かせいただけますでしょうか．

幾何学というのは数学の中でも非常に広い分野なので，すべてを把握はできておりませんが，代数や解析と比べると，幾何というのは節操がないと言いますか，代数も使うし，解析も使うし，幾何固有のものも使います．ですから，幾何の進展と代数や解析の進展はお互いにリンクしているところがあります．そのリンクしている状況が，昔に比べると現在はずいぶん強くなっていると思います．



小島定吉氏.

普通，学問が進展すると，どんどん細分化されていって，お互いにだんだん話が通じなくなっていきます．もちろん，数学の中でもこうした状況が起こるわけですが，幾何に限るとその節操のなさがどんどん広がっていて，幾何は何でも取り込むようになってきたと思います．

もう少し具体的に言うと，線形的な理論がどんどん非線形的になり，可換な世界が非可換になり，有限次元の話が無限次元を扱わざるを得ない，といったような流れが，幾何に限らず数学全体に広がっています．

その典型例で目立つものとして，リッチフローが挙げられます．幾何の対象としてはリーマン幾何の大域解析学になるわけですが，内容を見てみると偏微分方程式で，その解の挙動を調べるという，幾何的な設定を忘れるとまさに解析の問題ですから，扱う次元も必然的に無限次元になりますし，方程式自身も非線形になっています．

また，日本数学会の新しい企画として，シーズナル・インスティチュート（Seasonal Institute, SI）が始まり，そこでのテーマに「幾何における

確率論的手法」が取り上げられました．確率論のキーワードである，ランダムだとか確率分布だとか中心極限定理といった話が幾何に自然に現れ，ずいぶん交流が盛んになっています．

一方で，代数との結びつきとなると，主にトポロジーのいくつかの分野でグロタンディークが定式化したカテゴリという概念があって，これが今あらゆる所にはびこっています．

最近の傾向はこういったことが顕著になっていて，例えば，確率論的なアプローチという点では，幾何学的群論の中でランダム群という言葉が登場しています．こうしたことは20年前には全く見られませんでした．

とくに何が流行っているとは絞れないのですが，今はこうした状況が伺えると思います．

2. 海外の状況，他分野との交流

――そうしますと，代数や解析，確率との関わりもかなり強くなっているようですが，海外と比較するとその辺りの背景はいかがでしょうか．また，数学以外の分野との交流についてもお聞かせいただけますでしょうか．

非常に一般論ですが，数学というのは全世界で共通の言語を使いますので，国境のない学問と言われます．そういった意味で，他の学問と比べて地域性というのは小さいと思います．ところで，研究をする際に，一人で周りと孤立して行うことはあり得るのですが，何か結果ができると，周りとコミュニケーションをとって，一つのコミュニティができます．

そうすると，ある結果や理論について誰が知っているかといった情報の伝達のスピードは，そういったコミュニティのリンクの度合いが強いところが速いようですね．そういう意味で言うと，日本の有力な研究者はリンクの度合いが強いコミュニティの一員である場合が多いので，日本が非常に遅れている分野は少なくとも幾何の中にはないと思います．そういう意味で，幾何では，日本人が世界レベルで話せる幅は広がっています．

一方で，例えばコロンビア大学には，リッチフローではハミルトンがいたり，ペレルマンが証明した仕事を再現したモーガンや，ヘガードフロア・ホモロジーやホバノフ・ホモロジーという話の当事者であるオズバスやホバノフ，さらにはブレイドのパイオニアであるバーマン，何にでも詳しいノイマン，といった世界的に有名な幾何学者がいます．このように一つの大学に世界的に有名な幾何学者が集中しているという例がいくつかあります．ハーバード大学もそうですね．もちろん，アメリカの大学の平均値がこういったわけではないのですが，それと比べると，日本では地域ごと国内に有力な人が分散していて，分野のバランスも各大学でしっかりしている傾向があると思います．

こういった傾向が起こる理由として，数学には実験がないことが挙げられます．数学の言葉でコミュニケートできれば問題ないので，地域的に離れているということはあまり障害にならないからだと思います．

他分野との交流に関しては，昔は日本の数学者は保守的な傾向があって交流が少なかったのですが，ここ最近変わりつつあって徐々に増えてきているように感じます．これは自発的にそうなったというよりは，アメリカや他国を見てそうなってきたように思います．

こうした他分野との交流が盛んになったことの背景として，国の予算も関係しているようです．また，物理との関係は昔から結びつきが強くて，とくに最近ではアメリカの研究所の名前に幾何という言葉が入るぐらいになっていますし，東大では数物連携宇宙研究機構もできました．幾何と物理は，名前が分かれていただけで，実は興味の対象は一致していると思います．数学者から見ると，素粒子の話はリーマン面のモジュライ空間の研究であり，物理学者が見ると，リーマン面のモジュライの研究は素粒子の超弦理論の云々，といったこ

とになっています.

3. 幾何学の道に入るための心得

――海外の状況や昔と比べて日本での現状もいろいろ背景があると思いますが，学生がこういった道に入るにはどういったことが必要になるでしょうか.

そうですね. 先ほども言いましたように幾何には節操がないですから，幾何学者を教育するうまいカリキュラムというのは組めないわけです. 逆に言えば，節操がないことを楽しめる，そういうスタンスを持って幾何学の勉強に臨める人がいいように思いますね.

また，とくに行儀見習いの作法もありませんので，とにかく自分の好奇心を一番大切にしてもらいたいと思います. 幾何よりも先に好奇心があって，たまたま好奇心を満たすのが幾何であり，確率が必要なら確率をやったり，といった節操のなさがあるといいのではないでしょうか.

好奇心をもって興味が向いたものについてやればいいのですが，当然その興味への深さは重要ですね.

4. 社会への浸透

――本特集のメインテーマになりますが，幾何学が社会でいかに使われているかについてお聞かせいただけますでしょうか.

人間が社会の中でどうコミュニケートするようになったかを考えてみると，数学は科学の言語を創るようなものでその中の幾何は図形を対象とするものですから，図形があれば幾何の言語的役割が出てくるわけです. 例えば，机を作るのに，それを設計しようと思うと，半径だとか円弧といった数学の言葉が出てきますよね. 数学はある意味で言葉づくりについては先に進んでいるので，今の小学生から高校生までが使っている言葉は昔の数学で十分ですが，今の数学者が使っている言葉を未来の人たちが普通に日常生活で使う可能性はあるわけです.

今のは長期的にみた話ですが，短期的にみると，社会でのコンピュータの進展はここ十年ほどで非常に顕著ですから，目に見える幾何の恩恵から目に見えない恩恵までかなりたくさんあると思います. 例えば，あるソフトのアルゴリズムが幾何のおかげでものすごく高速に動いて，末端のユーザにもかなり役立っている，といった話や，他にも実際の飛行機の設計に必要なシミュレーションなどにも貢献していると思います. 飛行機ができてしまえば誰もそんなことは考えもしませんが（笑）….

コンピュータの進展の恩恵は，心理学などの人文系にもこれからはもっと幾何が関係していくように思います. 今の段階でいうと，数学では統計が一番関係していますが，そのうちに幾何も出てくるでしょう. 今回ご執筆頂いている甘利先生がそういったことを専門に研究されています.

また，動きを表すシステムを研究するのが力学系ですが，それが経済分析などで使われている話も最近ではかなり流行っていますね.

他にも，芸術との関わりで言うと，東大の合原一幸先生が企画されたシンポジウムは，数学者と芸術家のコミュニケーションができて非常に面白かったようです. 数学者が頭の中で創り出す絵というのは2種類あって，一つは誰かが昔みたことがあるような自然に近い絵で，もう一つはなんでこんな絵が出てくるんだろうというような，普通では考えつかないような絵があるんですね. 坪井俊先生が秋の学会（2008年）でされた講演の中で，実際にその場で計算機を走らせて，ポアンカレが3体問題を否定的に解いたときのシミュレーションをしたのですが，ポアンカレの時代には計算機がありませんでしたから，ポアンカレの頭の中にはそのシミュレーションした絵があったということになるわけです. 今日の数学でもコンピュータを使わない研究がありますから，そういう人たち

も頭の中で何かが見えているはずです．そういった意味で言うと，芸術家が何かを創るときに頭の中に創り出していることと幾何の接点は非常にあると思いますし，これからの幾何学にそういった可能性はもっと強く出てくると思います．

5. 影響を受けたこと

――先生が研究者になるにあたって影響を受けたことなどがございましたら，お聞かせいただけますでしょうか．

私は先ほども話に出たアメリカのコロンビア大学に留学した時期があるのですが，行く前にも人から聞いていて，行って帰ってきてからも自分で「なるほどな」と思ったことに，学者のプロ意識があります．

私がコロンビア大にいたとき，周囲の数学者は，自分は数学のプロである，という意識をもっている人が多いと非常に強く感じました．比較的自由奔放に研究している大学なのでそう感じたのかもしれませんが…．だからと言って，アメリカの数学者全員がプロ意識が強いとは言えないでしょうけれど，とにかく「なんでも理解してやろう」という気持ちがものすごく強く感じられましたね．

自分はこれしかできない，という話じゃなくて，せめて意識ぐらいは高いところに持たないと…．現実にはすべてを理解するなんて難しくてギブアップしてしまうんだけれども，目標を高く持てば，できないにしても少しはやれる，そういう気持ちをもった人たちが周りにたくさんいたというのが，影響を受けたことですね．こういう意識を常にもっていたいという気持ちは，研究者になってからも長く続いています．

私のコロンビア大での指導教官は先ほども話に出たジョン・モーガンだったんですが，今話したような典型的なタイプの人でした．もう60歳を過ぎているのですが，サーストン理論やドナルドソン理論からリッチフローまで，何でもやってしまう人です．こういう人を目の当たりに見て，いろいろしゃべってきて，ずいぶん影響を受けたんじゃないかなと思います．

6. 伝えたいメッセージ

――学生や後進の方たちに何かメッセージがありましたらお願いします．

前の「ポアンカレ」特集（2008年10月号）のときのインタビューでは確か，本を読め，と言ったように思うんですが，好奇心をもって数学をやったり，他の分野をやっていく上では，とにかくいい指導者・先生を見つけるといいでしょう．

本人がその気になっていい先生を見つける，ということと同時に，そのためにはいい先生がいないといけませんよね．いい学生はいるんだけれども，その周りにいい先生がいなかったり，いい先生がいても，その学校にはモチベーションの高い学生がいない，といった，ニワトリと卵の関係になるかもしれませんが，どうしても見つからなければ外に出て，いい先生を探すのも手だと思います．自分にとっていい先生が他の人にとってもいい先生であるとは限らないですから，答えは一つではありません．ですから，幾何と同じようにそのぐらいの節操のなさをもって動いていっていいと思いますよ．出会いそのものを探さないと向こうからは来ない，ということですね．

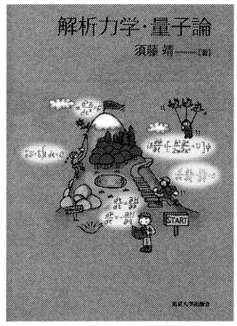
――本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

（2008年10月，
東工大大岡山キャンパス研究室にて）

（こじま・さだよし，東京工業大学大学院情報理工学研究科）

解析力学・量子論

須藤靖著，A5 判，288 頁，本体 2800 円，東京大学出版会



『解析力学・量子論』というタイトルには少し驚いた．もともと解析力学と量子論は相性が良いので，一つの本の中で解説するというのは良いアイデアだと思う．しかし，ここまで思い切りよく前面に出している本は見たことがなかった．この本の特徴はこの思い切りのよさにある．題材の取り上げ方，説明のメリハリ，特に，計算の丁寧さと直感的説明のバランス，そして哲学的な考察や随想をちりばめること，そのどこにも迷いがない．

まず，目につくのは第 1 章のタイトルが「科学の意義」となっていることである．ここで，本書の意図は，「力学を通して物理の世界へといざない，科学の楽しさ，自然の不思議さを伝えることにある」と知らされる．

この本は大きく分けると，最初と最後の章の科学哲学的部分，2 章から 5 章までの解析力学，6 章から 12 章までの量子論，付録，そして 200 以上の脚注からなる．付録には，電磁場の量子化への導入，デルタ関数のコンパクトな解説，教育的な演習問題が修められている．是非，ここまで読んでいただきたい．

白状すると，この本の“降格された脚注”を読みながら笑ってしまった．物理の本を読みながら笑ったのは生まれて初めての経験である．随所に挟まれた脚注はそこだけ取り出して読んでも面白い．語り口が絶妙なのだ．もちろん，物理の解説も絶妙な間合いで展開される．よく題材として取り上げられるような内容に対しては思い切って直感に訴え，普通の教科書で曖昧にされているようなことは掘り下げて説明してある．例えば，対称性と保存則の章では，繰り返しをいとわずに，対称性と保存則の関係を説明している．具体例を用いて対称性から保存則を導いて，ネーターの定理に至り，さらに具体例で確認するという念の入れようである．1 次元量子系では実に詳細な計算が丁寧に実行される．6 章と 7 章の宇宙論に関連した例は，多くの読者の興味を引くのではないだろうか．古典論から量子論に至る展開は，粒子と波動の二重性からシュレディンガー方程式を導くというもので，説明が生き生きとしていて面白い（あ，シュレディンガーではなく，シュレーディンガーでした．本書脚注参照）．個人的には，ハイゼンベルクによる正準交換関係の発見に至るストーリーも加えてもらいたかった気がするが，紙数の都合上いた仕方なしか．

6 章では，19 世紀物理学にたれこめる 2 つの暗雲という節から始まる．2 つの暗雲とは，エーテルと黒体輻射であり，本書のテーマは後者が如何に量子論と関係しているかを説くことにある．現在，20 世紀物理学にたれこめる 2 つの暗雲，暗黒エネルギーと暗黒物質の謎に迫ろうと第一線で研究を続けている著者が量子論成立前の状況を現在の状況に重ね合わせて見ている気がする．このあたりを読んでいるうちにワインバーグ著『宇宙創成はじめの 3 分間』（ちくま学芸文庫）の次の一節を思い出した．「しかし，科学の成功がいかに困難であったかを理解することなしには，成功を本当に理解できるとは私は考えない―惑わされるのはいかに容易であるか，どんなときにでも次になすべきことはなにかを知ることはどんなに難しいことであるか．」これは，宇宙背景輻射の発見に関連して書かれたものであるが，一つの学問が如何にして生み出されたのかを学ぶことは決して無駄なことではなく，むしろ新しいものを作り上げるヒントになることすらある，ということを示唆している．本書のようにゆっくりと勉強することは大切なことなのだ．

ところで，ワインバーグの言葉の中で，「科学の」という部分を消してしまうと，どの世界でも通用することに気づく．次になすべきことはなにか，これこそ真に考えなければならないことであり，科学の研究はその意味で普遍性を持つのではないだろうか．あ，どうやら書評の域を超えてしまったようである．著者に感化された感がするのでこの辺でやめておく．

この教科書は演習問題が解けるようになるように意図された教科書ではない．解析力学と量子論の理解を目標としつつも，科学の楽しさを教えるために解析力学と量子論を題材にするという趣になっている．その意味では，理系の大学生に限らず，知識欲旺盛な高校生や文系まで含めた大人のための科学の入門書と言っても良いだろう．

早田　次郎（京都大学大学院理学研究科）

BOOK REVIEW



面白いから

平田 典子

1. 数学をしつこく考える贅沢

整数論の一分野であるディオファントス問題に魅せられ，30年間を夢中で過ごして参りました．フランス政府給費生の試験を受けてパリに行き，思い切り勉強した留学生時代が昨日のようにも思えるこの頃です．数学で生活ができるのかどうか，などを考えることも真面目にしないまま，ひたすら好きでやって参りました．数学の美しさを単に味わうことにとどまらず，数学の自然現象に介在する何かを解明し，また解明されなくてはならないものが何であるべきかを考える．大抵はトライアルと挫折の繰り返しでロクに何にもできないことが多いのですが，その厳しさと面白さには他に比類のない魅力を感じます．世の中のあらゆる科学の研究にはそれぞれの特性がありますが，論証を積み重ねて行くことに関しては，数学ほど厳密さが要求される学問はそれほど多くないかと思われます．その厳密さのもとに自分の問題をゆっくりとしつこく考え詰めることは，自分が今も昔も一番やりたいことでありまして，そのようにやりたいことができるということは，最高の贅沢ですし，丁寧にしつこく考える時間が忙しくて取れないときは，我ながら実に不機嫌になるわけです．

2. 子ども時代

子どもの頃は本ばかり読んでいました．手当たり次第から始めて，好きな作家のものは年表を整理し，著作全部を年代順に読み，順番を入れ替えて尚また繰り返し読む．小説よりも随筆や評論，批評の類いが好きで，中谷宇吉郎氏の著作なども良く読みました．「暮しの手帖」という雑誌に連載されていた坂西志保氏の随筆がことのほか気に入り，坂西志保氏の論説の根幹を成している，学問に対峙する氏の厳しさに，あたかも寒い寒い冬の朝に出かけるときの凛とした気持ちのような透き通ったすがすがしさを感じて，一人で悦に入っておりました．

3. 学生時代

学生時代は数学図書室をうろうろしまして，そこでディオファントス問題の本と出会いました．ちょうどA. Bakerがフィールズ賞を取ってしばらく経ち，種々の解説本が出ていた時代でした．A. BakerのCambridge出版の教科書や，M. Waldschmidtの Springer Lecture Notesの教科書を読み，超越数論を学び始めたことからディオファントス問題に入りまして，現在の専門であるディオファントス近似に導かれました．ディオファン

トス近似は，たとえ非常に本質的で難しい問題であっても，専門家でない数学者にとっては，ちょっと見には自明な命題のように見える場合があったりする分野です．つまり，専門家としての修行をじっくり積まないと研ぎすまされないような，独特の感覚が多少あるのです．中学高校の先生として少し勤めたあと，そのような修行がどうしてもやりたくてパリにやって来ました．この連載のサブタイトルは「研究者の道とは何か」という麗々しいものですが，私などはこのように道なき道をただ面白いからということで，素手でかき分けて来ております．

4. ブルシエ時代

フランス政府給費留学生いわゆるブルシエの試験のためにはフランス語も必要でしたので，少しばかりアテネフランセに通いました．文法書を1冊きっちり読んだらやっとフランス語の習得がはかどるようになり，試験も済んでパリ第6大学の博士課程に無事に潜り込みました．初めはフランス語が言葉ではなく，ただ音楽のように聞こえていましたが，フランス語の授業やセミナー，彼らの板書の独特の書きぐせにそのうちに慣れ，フランスの文化のあれこれに面白さを見つける愉しい日々を過ごしました．パリ第6大学の Waldschmidt のセミナーのチームは和気あいあいで，これは Waldschmidt の人となりのおかげでした．このような場に居られたことは実に幸運であったと深く思います．人脈の重要さを知ってわざわざ他の数学者と近づきになったわけではなく，同じ問題を面白いと思ういわば同好会の中で，将来の人脈を築くことができたことになりました．同好会ですからまさにツーと言えばカー．証明の表記でも H と書けばこれこれ，T と書けばあれ，という具合でした．何しろ諸問題の生まれる現場を見続けていたわけでありまして，これは，できてしまった整った定理が紹介される場とは異なりますから，ものの考え方，考えあぐねているときの問題の切り口の見つけ方などを，知らず知らずのうちに覚えることができたように思えます．

パリには多くの数学者が集まりますので，研究集会や集中講義講演者としてのヴィジターも含め，多くの世界的な数学者との出会いがありました．例えば S. Lang は厳密さを欠くような印象のある数学者であると思っている方が多いかもしれませんが，彼がいかにディオファントス問題に関するセンスの良い問題を多く提示していたかということは特筆に値します．彼の論文には，単に予想を叫んでいたという範疇ではおさまらない鋭い先見性が感じられます．後に平田のデビュー作をまず認めてくれたのも Lang で，文字通り無名の者の結果をきちんと理解して頂けたことは，私にとっては計り知れないほどの励ましとなりました．また，若くてみすぼらしく，毎日の暮しのお金にも困るような食い詰めた人々の中に，信じられないほどの優秀さを示す学徒が混じっていました．その中の何人かとはいわば同級生として交流し，数学以外についても実に色々な話をしました．今，その連中はすっかり偉くなって，パリにとどまらず世界中に散って一流大学の教授として数論の研究室を主催しています．今も会えば昔通り話せる間柄で，若いときのこの種の人脈は年を取ってから得たものとはまるっきり異なる珠玉の人間関係であり財産であると断言できます．

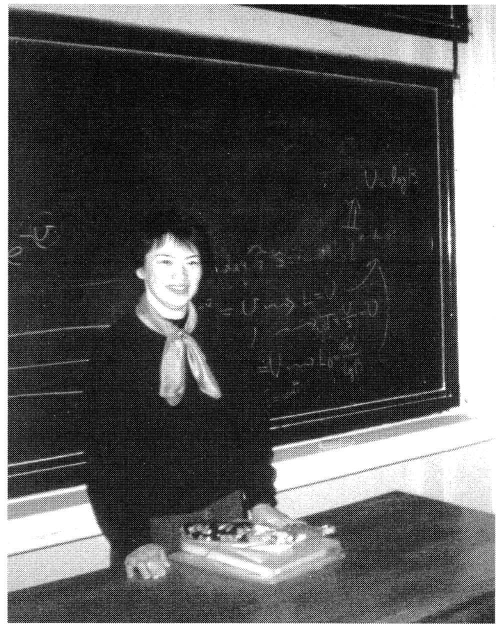
志村五郎氏がパリに集中講義でお見えになったときには，3カ月間の講義を聴く機会に恵まれました．最近お書きになられた『記憶の切繪図』という本[1]には，パリ時代の描写があって大層楽しく読ませて頂きました．厳しいですが，もっともだと思われるご意見もありました．私は氏にも励まして頂いたように勝手ながら記憶しており，今でも数学の根底を形作るような氏の仕事の始め方に畏敬の念を抱いております．

5. 助手時代

縁あって奈良女子大学理学部数学科の助手に採用して頂きました．奈良女時代に渾身の力を込めた仕事[2]が一つできたのは大層有り難いことでした．パリから日本に帰っていたため，同好の士と離れて完全に一人で問題を考えることができたの

も，ある意味で非常に幸いでした．指導教官の部分集合で終わるのでは誰しもイヤですが，特に留学生や女子などはそのように見られがちです．日本人については何かとアイデアを持って行かれてしまう例も目にしており，そのようなことのない離れた場での，真に一人でのロード開始となりました．

ディオファントス近似では問題の設定は単純な場合が多いのですが，一方ほんの小さな指数の改良であっても本質的な進歩に相当する場合が少なくありません．構造的な数学の記述とは袂を分かつ感があります．私のこのときの結果もある近似の指数の改良でした．この話題によってOberwolfach研究所のワークショップやその他の研究集会に遅ればせながらデビューし，フランス以外の国の人々とも少しずつ知り合いになってゆきました．その後，東京工業大学理学部数学科に移り，ちょうど子どもが生まれたこともあって，超越数論に関わる近似ではなく，別のディオファントス近似についてじっくり勉強する時間をまとめて持つことができたのも，良いタイミングだったと思います．



“Diophantine Geometry” での講演（1999 年 2 月，Paris Centre Emile Borel 研究所（旧 Henri Poincaré 研究所），Hermite 講堂にて）.

6. 新たな面白さ

日本大学理工学部数学科に移ってからは，普段は同じ専門の数学者の居ない数学教室で少しずつ勉強し，時々研究集会に出かけて専門家たちと交流するが，集会が終わると颪去ってまた一人になるという周期が身に付いて参りました．周りに討議をする相手が少ないのはちょっと寂しいですが，恒常的にはこれも案外悪くないと思われます．討議で盛り上がりたいときには，ささやかな講演会を開きます．もっとも日常の忙しさに追われて精神をピーンと澄ます時間が足りませんから，研究集会の少し前はそれこそ目が吊り上がった状態になっており，不機嫌極まりない．問題を解くどころか，味わう時間を持つこともできないのでは至極残念，本末転倒，こんなんじゃだめだ，もっと考えをゆったり泳がせないといけない，などと思っております．今やインターネットなどでプレプリントも取り放題の状態ですから，情報はむしろ過多であるわけですが，常日頃たった一人で問題を考えて煮詰める面白さが数学の醍醐味ですし，それに費やせる大きな時間の塊こそが，科学文化を担う根幹としての学問に一番必要なことでありましょう．

センセーショナルな整数論の進歩がたまに世にありますが，そこに使われていたのはごく昔からのディオファントス近似であるという体験を時々します．ディオファントス近似における最も大事で基礎的な命題（もしくは自分が今最も素晴らしいと思っている命題）は部分空間定理（Subspace Theorem）と呼ばれるもので W.M. Schmidt により証明されています．これは，整数論の種々の問題に応用した後の記述がわかりやすいのにも拘らず，もとの記述ですと一体どこが素晴らしいのかが，どうもなかなか分かりにくい．この理由により解説をありがたがってもらえるため，頼まれれば宣教師の気分で日本中世界中どこにでも出かけて行き，布教のための授業や講演などをします．そうやって授業を準備していると新たに面白いことを見つけたりして，おお温故知新じゃないかと気分が良いことこの上なく，今度は機嫌が良くな


Paris の友人宅にて（1999 年撮影）.

ります.

奈良女時代に夢見ていた一つのディオファントス近似を得るのに前代未聞の時間を要しましたが，やっと形あるものとして実を結び，さきのS. Lang の一予想の解決として出版[3,4]の運びとなりました．部分空間定理に関連する仕事のほうも，だいそれた野望を持ちつつ這いつくばり続けてきましたが，少しは姿が見えてきたかなと感じております．10 年で一仕事．本来はこの辺がまともな数学の仕事ペースだぞ，と言ったら怒られるかもしれませんが.

7. ディオファントス近似の考え方

近似というのは概ね，ある物を停めて別の物を動かし，現象がどう変わるかを追求することでありましょう．停めるものと動かすものを変えると問題も変化します．また動かすものの種類や個数を増やせば問題の見かけは変わりますが，難しくなるとは限りません．有理点の分布などを求める問題では，有理点とそうでないものを区別することが大事ですが，例えば代数多様体を停めて有理点を動かし，そこに普遍的な現象が示されるかどうかを見ることによって，有理点の考察を行うわけです．そこでは有理点の特徴をいかに記述し近似（例えば近似不等式）に乗っけるかを考えることが大きな問題となり得ます．有理数をどうやって特徴づけるかということですが，ただ整数を整数で割った数という捉え方では，近似にうまく乗っかりません．近似は距離を縮めて行うとすると，距離のような性質を持ち，かつ有理数を捉えられる概念が必要です．これが「高さ」という関数であります．高さの登場によってディオファントス問題にディオファントス近似という高性能機器を応用できるように相成りました．有理数の最も原始的な「高さ」は分子の絶対値と分母の絶対値の最大値（あるいはその自然対数の値）に相当します．つまり 1 個の有理数を分子と分母の整数の組，即ち 2 次元の整数格子の点と捉えることに始まるわけです．有理数を数直線に図示しようとしても，その特異な様子はうまく書き入れられません．2 次元の整数格子の点としてならば図示できますし，構図が見渡せます．そして d 次代数的数というものに対しても $d+1$ 次元の整数格子の点として簡単に拡張できます．「距離」を用いる近似の世界に生きると言うことは，いわば図示しやすい世界に居ることに相当するので，ひたすら描きやすいものを追い求めるといった処でしょうか．つまりはどんなに分かりにくい記述の定理でも，ディオファントス近似ならば幾何学的な理解の存在が自然であるし，逆に，行き詰まったときには絵を描いてみようかと考えることになります.

8. 古書

数学における文献の重要さは言うまでもないのですが，ディオファントス問題では古い文献に大事な物が多いこともあって，文献の整理や収集に興味を持たざるを得ません．最近ではインターネットで検索購入できますので，様々な稀覯本の入手も夢ではなくなりました．また，長く探していた専門書を古書店で発見することもたまにあります．隣に居る古書店のお客に悟られないように，そうっと目当ての本をつかんでレジに持って行くときの愉快な気分は，その後の一週間全部が，下らない雑用で忙しくても許せるくらいです．日本人の戦前の数学の研究者である森本（深沢）清吾氏の論文

集も，友人の情報提供のおかげで，古書店で先日入手して日大理工の数学図書室に入れました．整数に値を持つ複素関数についての森本氏の論文に関わる一つの考察が，自分の駆け出し時代の論文ネタであったという経緯もあり，また氏の素人っぽく茶目っ気のある様々な範疇の研究には敬意を持っておりました．森本氏の夫人である森本治枝氏は東北大学を卒業された女性数学者であり，最近その回想録が出版されています．

数学の本は読んで楽しいといえるほどには早く読めない書物が多いですが，ノートを作って丁寧に読む行為も学生時代のようでまた楽しです．そのためのノートを買い込むだけで浮き浮きします．そういう読まれ方に値する本は本来は少ないのでしょう．

9. 女性であること

最近とみに女性研究者支援ナントカという機会がありますが，女性であることでケチをつけられる場合があまりに多いから女性研究者支援ナントカになるのでしょう．人類の性別による分類と専攻分野の分類とが一致する理由はどうも見つかりません．女性で研究を志す人間は，最初から相当の覚悟を決めざるを得ませんから，少々のことにはくじけないという気は致します．多様な専門分野の研究者と話をしていると，数学の人間は独特であり，数学の中での男女差は，数学以外の分野の研究者と数学者との差に比すると $o(1)$ であると感じます．すなわちかなり分野に依って人格が違っているという気がします．

数学は体力も要らず，ヒラメキとしつこさ，そして面白いと思ったことにのめり込み，かつそれを維持するパワーがあればよろしいのですが，何より面白いと思って好きでやってる人にはかないませんよ，だっていつもやっているんですから，というわけで，とにかく数学をやっている人々は皆，男女問わず面白いから数学を考えるわけです．

10. 研究者の道

「研究者の道」というサブタイトルについて考えてみましょう．勉強が好きという理由には，褒められるから等もあるとは思いますが，やはりその勉強の内容ズバリを面白いと思わないと本当に好きにはならないでしょう．どうしたら数学が面白いと思えるかということですが，数学は中学校でも高等学校でも幸いにして主要教科になっていますので，全く数学を知らないで大学まで来るということはありません．それでも数学を仕事の対象にするには，専門的な勉強を行わないとだめですから，若いうちにかなり専門的なレベルにある数学を面白いと思える環境は，研究者になるためには必須でしょう．

大学の教養の微積分などで高校生にとっても面白い話は一杯あります．また，証明は難しいですが，ディオファントス問題は結果だけならば比較的中学生や高校生に分かりやすいものもいくつかあります．あるいは私も子どもの頃に好きだった



Canada, Tronto の Fields Institute にて（2004 年撮影）．

初等幾何の問題のあれこれに接するのもよろしいでしょう．しかしながら，たとえうまく若い時分にこういうことに夢中になって，数学を専攻するに到っても，その先に研究者になる道が限られているために日本の数学の若い世代がいま阻まれているとすれば，それは類い稀なる非常な損失であります．

ヨーロッパの一部の国々の若い人のための数学のポジションの少なさはびっくりするほどです．フランスでも現在は随分若手のポジションの数が多いですが，私の居た頃の同級生たちは世代交代のはざまに挟まれて，相当優秀な人でもポジション探しに困っていた時期がありました．それでも，優れた徒には必ず複数の先生がついて，常に励まし大事にしていました．数学は個人研究が基本とは言え，フランスでは複数の先生がチームを組み，その複数の先生がまとめて複数の学生を面倒見る体制であったような気がします．日本でも通常のセミナーなどでは色々な教員が参加しますが，より工学系のような，人事上も強いつながりを持った組み方で純粋数学の研究チームが作られていたように思えます．そういう場では多少の災害にもめげない耐震構造で学生は守られておりました．曖昧な記憶ですがフランスでは人口あたりの数学者の人数がちょうど日本の倍程度に多いように思います．それゆえできたことかも知れませんが，目利きの数学者には雑用などさせずに，若手を先見性のもとにしっかり教育することをお願いするのが最良ですね．ともあれ数学の伝統があるフランスのような国が，他のヨーロッパ諸国と競争して数学的文化的優位に立とうとする意欲を若手数学者の育成という行為として表したとすれば，これほど賢い方法はないでしょう．

もしこの拙い文章を，数学者になりたい若い方がお読みになっておられましたら，数学はそれこそ夢のように面白い学問なのですから，是非とも勉強してみてください．それもアマチュアとしてではなく，促成栽培によってでもなく，真に専門的な勉強を専門の場でじっくり行う，ということを諦めずに試みてほしいと思います．

運が良ければ研究者になれます．運が悪くても10年たてば良い結果が出るかもしれない，時間を短縮することはむしろ危険でしょう．国の内乱で家もなくなっちゃったとか，兵役でこれから2年取られるとか，紙もないから計算できない，などというお友達が外国には大勢居ました．また，雑用で忙しく勉強時間が取れないと言う気の毒な数学者の存在は，勿論日本だけではありません．私などはいわゆる四重苦，五重苦を負って就職にも苦労してきましたが，うまい数学の証明をすることができたときの喜びは，断じて他のことに置き換えられないようなハイレベルの幸福です．

今，下らない雑用に腹を立てるとき，古書の街を歩きます．そして，お金も将来の保証も全くなかったパリ時代だったけれど，とにかく自分はボロは着てても本当に「心はニシキ」だったぜ，と思い出し，気を取り直して数学に向かいます．

空気が澄みわたりました．また出かけよう．

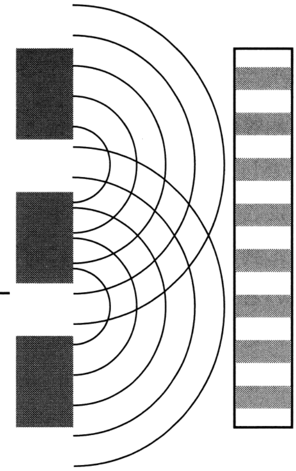
参考文献

1) 志村 五郎，『記憶の切繪図』，筑摩書房，2008.
2) Noriko HIRATA-KOHNO, Formes linéaires de points algébriques sur les groupes algébriques, *Inventiones Mathematicae*, 1991, vol.**104**, 401–433.
3) Sinnou DAVID and Noriko HIRATA-KOHNO, Recent progress on linear forms in elliptic logarithms, In *A Panorama in Number Theory* (ed. G. Wustholz) Cambridge University Press, 2002, 26–37.
4) Sinnou DAVID and Noriko HIRATA-KOHNO, Linear forms in elliptic logarithms, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2009, vol.**628**, 37–89.

（ひらた・のりこ，日本大学理工学部）

目で見て学ぶ 量子力学

第9回 実験でひもとく量子の不思議



アハラノフ・ボーム効果の検証実験

外村　彰

9.1 はじめに

「電子は触れてもいない磁場から，物理的な影響を受けることがある」．これが，アハラノフ・ボーム（AB）効果である．

AB 効果の歴史は100年も前のM. ファラデーに遡（さかのぼ）る．ファラデーは，電場 $\boldsymbol{E}$ や磁場 $\boldsymbol{B}$ よりも，さらに基本的な物理量として，そこから $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{B}$ を導き出すことのできる Electrotonic Intensity（電気的緊張度）の存在を予測している．やがて J.C. マックスウェルは，それがベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ であることを見抜き，マックスウェル方程式の中に $\boldsymbol{A}$ を組み入れた．$\boldsymbol{A}$ は，れっきとした物理量として扱われ，“電磁気的運動量” と呼ばれた．ゲージ場の理論の登場と共に，$\boldsymbol{A}$ はゲージ場に拡張され，あらゆる力の統一理論の最も基本的な物理量とみなされるようになる．

ただ，ゲージ変換によって全く異なった分布を取り得るという点で，$\boldsymbol{A}$ は我々の馴染みの物理量とは異なっている．しかし，物理量であるという証拠もある．実はそれが AB 効果である．$\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{B}$ がゼロであっても $\boldsymbol{A}$ が存在すれば，その領域を通る電子に物理的な影響が及ぶことがある．

9.2 AB 効果は存在するのか？

AB 効果は，古典力学の範疇では考えられない量子力学的効果であり，我々に「量子の世界における電磁気とは何か？」という問題を再考させてくれる．それだけに止まらない．量子力学の基本的問題や電子と場の相互作用のあり方などにも関連する[1]．

例えば，波動関数の一価性．電子のスピンを表現するスピノール[傍注1]は二価であることを思い起こすと[傍注2]，波動関数が一価でなければならないと初めか

［傍注1］ 電子のスピンは，3次元空間のベクトルとは異なる性質をもっている．1回転すればすべて元通りになると思うかもしれないが，スピンの波動関数は同じ値にならず，マイナスがつく．2回回転して初めて元通りになる．“スピノール” という数学で表現できる．

［傍注2］ 同じ場所に戻ってきたとき，いつも同じ値になるとは限らず，1点にいくつもの値があり得る関数を多価関数と呼ぶ．

［傍注3］　空間内部のどんな閉曲線も，連続的な移動で一点に縮めることのできる空間を“単連結である”と言う．そうでない空間，例えばドーナツ内部の空間は“多重連結である”と言う．

ら決めつける訳にもいかない．無限に長いコイルの周りの多重連結空間[傍注3]での波動関数が一価でなければならないか否かという基本問題を考えさせてくれる好材料になる．さらに相互作用の局所性．これを放棄してしまえば，$\boldsymbol{A}$を持ち出すまでもなく$\boldsymbol{E}$や$\boldsymbol{B}$だけでAB効果は理解可能である．電子はその位置の場だけから影響を受けるのではなく，離れた場と相互作用するとすれば，ポテンシャルを導入するまでもないかもしれない．しかし，非局所的な理論を作り上げることは容易なことではないし，局所性の放棄はゲージ理論の根本理念を放棄することになる．

$\boldsymbol{A}$の実在性の問題は，マックスウェル以来，H. ヘルムホルツ，H. ワイル，C.N. ヤンと続く歴史の流れの中での中心課題であった．AB効果論争が激しくなった1981年，我々は「理屈だけでは決着がつかないので，確固たる実験事実を提供して長い論争に終止符を打ちたい．もし，干渉性の良い電子線を開発した我々に実験ができなかったら，他の誰ができると言うのだろう」，こう思い立って完璧な実験のデザインを考え始めた．

9.3 事の起こり

1981年の6月の初めだった．東大物理教室の秘書の女性から電話がかかってきた．「ヤン先生が，外村さんと話したいとのことです」．突然のことで，一瞬呆然とした．「AB効果の検証実験を計画中との手紙を受け取った．今，東大の宮沢弘成教授のところに滞在中だが，時間が取れるので，議論をしに研究所に伺いたい」「わざわざ日立中研にまでお出で戴くのは恐れ多いので，こちらから出向く」と何度も申し上げるが，実験装置も見たいので，電車で来られるとのこと．翌日，ホテルまで迎えに上がることでやっと合意し，電話を置いたときには，電話を持つ手がびっしょり濡れていた．

ヤン先生が何故わざわざ国分寺まで足を運んでくれるほど興味を示してくれたのか？ AB効果の中にゲージ理論の基本原理を見出したヤン先生は，電子の位相に深い関心があったからだと思う．

ゲージ理論と言えば，今でこそ統一理論の最有力候補として知られている．だが，ヤンが1954年に初めてこの理論を唱えたときには，誰も振り向くことすらなかった．あまりに，従来の考え方を逸脱していた．ヤンが1954年春のアメリカ物理学会でヤン・ミルズ理論を発表する直前，J.R. オッペンハイマー所長からプリンストン高等研究所に招かれた．このときのセミナーの話は，まさにその状況を髣髴とさせる．

話が始まるや，滞在中のW. パウリがヤンに質問した．「ゲージ場の質量はいくらか？」ヤンが「分からない」と答えて話し始めると，パウリはまた同じ質問を繰り返し，座り込んでしまったヤンに対し，「話の先を続けてもらいましょう」と言うオッペンハイマーの助け船で，やっと話を終えることができたと言う．「それでも論文にしたのは，理論が大変美しかったからだ」とヤン先生が私に言った言葉が頭に残っている．

理論が正しいことが認識され始めた1975年，ヤンは「理論家は，ゲージ場の実在を信じてはいるものの，実証された訳ではない．それを実証するのはAB効果とモノポールの存在である」と主張した．

その数年後，AB効果の激しい論争が巻き起こる．ちょうど，その頃，我々は干渉性のよい電子線を開発し，電子線ホログラフィーと呼ばれる新しい観察手法を10年がかりで実現したところであった．この技術をもってすれば，問題となっていたわずかなミクロな磁場の漏れをも定量的におさえられるので，論争に決着をつけるような完璧な実験が可能かもしれない．こう考えて，大学の同級生だった藤川和男さんの勧めでヤン先生に「AB効果の完璧な実験を計画しているが，物理学にとって本当に重要なのか？」を問う手紙を書いた所だった．

9.4 検証実験

ヤン先生の来所によって，AB効果への情熱が一気に燃え上がることになる．実験開始当時，日本ではAB効果という名前すら聞いたことのない物理学者がほとんどだった．研究所の中でも，「一体何の役に立つのか？」「こんな実験をして本当に面白いのか？」などと言う人も多かった．こんな状況にあって，ヤン先生の来所は社内向けにも大変効果があった．「ノーベル賞のヤン先生がわざわざやって来たのだから，きっと面白くて重要な実験に違いない」と支援してもらえるようになった．

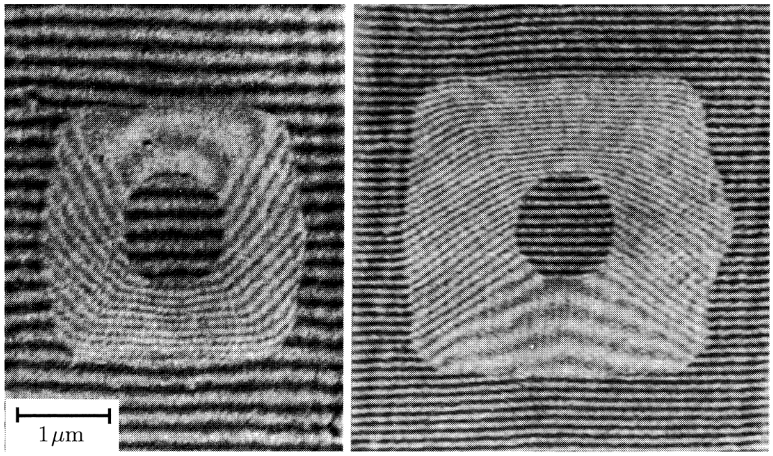
この実験で事が終わる訳ではなかった．実は，論争の渦中に巻き込まれて，何種類もの実験を繰り返すことになり，実に6年もの歳月を費すことになる．そんな長い間，会社の中で基礎研究を続けることができたのは，ひとえにヤン先生のご支援とAB効果の実験がきっかけでスタートした国際会議ISQM（International Symposium on Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology）のお陰であった．

検証実験は中央研究所の磁性グループと共同で直ちにスタートした．これまでAB効果の検証実験には，小さなコイルや棒磁石が使われていた．これらの実験では，コイルや磁石の両端から磁場が漏れ出していた．これまでの実験では，この漏れ磁場によって位相差が生じているので，AB効果の検証にはなっていないという指摘がなされていた．確かに，当時ミクロな領域でのわずかな磁場を測る手法は存在しなかった．

磁場の漏れをなくすには，磁石やコイルを無限に長くしなければならない．だが実験では，そんなことはできない．そこで，棒磁石をぐるっと曲げて両端のN極とS極をつなぎ合わせてドーナツ状にする．こうすれば，有限の大きさで理想的な実験が可能になる．

決め手は，“磁場が内部をぐるぐる回って外部に出て来ない小さなドーナツ状の磁石”を作ることにあった．これを微細加工技術[傍注4]で作ることにした．日立中研で磁気バブルメモリーの研究開発をしていた杉田愃さんのグループにサンプル作りをお願いした．しかし，実験は容易ではなかった．サンプルが満

[傍注4] 微細な半導体回路を作るために開発されたリソグラフィー技術を使った．この手法では，まず微細加工を施したい薄膜の上にフォトレジストを重ねる．パターンを描いたフォトマスクを重ねて光を当てると，その部分だけフォトレジストの構造が変化する．これを“現像”すると，光を当てて構造変化をして薬品に溶けにくくなった部分だけが残る．この状態で薬品につけるとパターン通りに薄膜がエッチングされる．フォトレジストをはがせば，微細回路ができ上がる．



(a)　(b)

図 9.1　電子線の干渉写真．(a) 時計回りの磁力線の場合，(b) 反時計回りの磁力線の場合．

足いかないことが分かると，翌朝早く電子顕微鏡で実験をやっている松田強と一緒に結果を報告に行った．「サンプルをすぐに作り直してほしい」．だが，向こうもバブルメモリーの試作プロセスが流れているので，急に言われても難しい．それでも何とか頼み込んで作り直してもらう．こんなことが，一度や二度では済まなかった．何度頭を下げに行ったかわからないが，そのうち，“サンプル作り”，“電子線ホログラフィー観察”という両者の分担は混然として境界がなくなってくる．「サンプルが悪いと言うが，そんなはずはない．俺が観察してみる」と電子顕微鏡の実験に加わり始める．

以後，異なった分野の人と何回か研究をしたが，不思議なことに，こんな場面に至らないと，きれいな結果は得られない．その代わり，結果が出たときは，全員が「この実験は自分がやった」と思っている．論文にたくさんの人の名前が載ってしまう．順番も難しい．この結果が誰のお陰で得られたかをじっくり考えなければいけない．

丸 1 年経って，「AB 効果は存在する」と出た！ ドーナツの孔の中と外側を通る 2 本の電子線はいずれも磁場のない空間を通っている．にも関わらず，干渉縞は確かにずれている（図 9.1）．2 本の電子線の間に位相差がなければ，干渉縞はドーナツの内外で一直線上にのるはずである．ところが，干渉縞を辿ると，ドーナツの内外で段差があり位相差が生じていることが分かる．$\boldsymbol{A}$ によって波面がずれ，位相差が生じたに違いない（図 9.2）．

「ひょっとすると，この位相差は，ドーナツの孔の中に何らかの物質が詰まっていたために生じたのではないか？」と言う人がいるかもしれない[傍注5]．この疑いを取り除くため，図 9.1 にはドーナツ内部の磁力線が右回りと左回りの場合を示した．ドーナツの孔の中を通った電子線の波面が遅れる場合と進んだ場合を示している．もしも物質が詰まっていたために位相が変化したとすると，位相は常に“進む方向”にしかずれない．この 2 枚の写真は，位相が進む場合だけ

[傍注 5]　物質を通ると，電子は位相変化を受ける．電子が物質内部に入ると，内部電位（10〜30 ボルト）分だけ加速され，波長は短くなる．このため通過する物質の厚さに比例した位相変化が生じる．

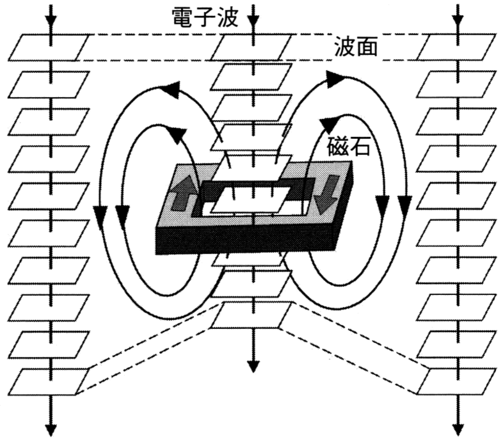


図 9.2　AB 効果の原理.

でなく遅れる場合も存在することを示しているので，そうした可能性は否定される．磁力線の漏れが十分に小さいことも定量的に示し，この結果を Physical Review Letters に投稿した．

1 カ月経って，リジェクトの返事が来た．2 人のレフェリーの意見が極端に分かれ，現状のままでは掲載できぬと言う．激しいやり取りの後，エディターの判断で論文はやっと世に出ることになった．

9.5 ISQM

論文が公表されたのが 1982 年 6 月だったが，私はその年の仁科記念賞を受賞した．さらに仁科記念財団から，AB 効果の論争を議論する国際集会のための支援を受けることになった．国際会議開催の経験がなかった私は，中研の原田征喜第 4 部長と一緒に江澤洋先生（学習院大学）のところにご相談に行った．すると，江澤先生は，我々をつれて東大物性研の中嶋貞雄所長を訪問し，そこで組織委員会の案が練られた．やがてこの委員会で "新技術の光に照らした量子力学の基礎" という会議の形が整い，ISQM が発足することになる．

第 1 回 ISQM（1983 年）で，我々の AB 効果の実験が発表された．ISQM は以後 3 年毎に開催され，チェアーマンは，第 7 回から中嶋先生から福山秀敏先生に交代し，2008 年で実に 8 回目を迎えた．当初，C.N. ヤンは毎回のように最前列の席に陣取って適切なコメントをしてくれたので，この分野の若い研究者は競ってこの会での発表を希望した．第 1 回の会議の様子を写した写真（図 9.3）には，錚々たる研究者が居並んでいる．久保亮五，Y. アハラノフ，A. レゲット，牧二郎，M. ペッシュキン，D.M. グリーンバーガー，A. シモニー，南部陽一郎，J.A. ホイーラー，A. ツァイリンガー，A. アスペ，木下東一郎，高橋秀俊，近藤淳などなど．あたかも 1920 年代の量子力学の基礎に関する議論が，60 年ぶりに復活したかのようであった．

ところが，AB 効果論争が，これで決着がついた訳ではなかった．例のレフェ



図 9.3　第１回 ISQM での写真（1983 年）.

リーの納得を得るには至らなかった．レフェリーの反対意見が，ヌオーボ・チメントというイタリアの雑誌に論文として掲載されたのである．「この実験は AB 効果の検証ではない．電子線の一部がドーナツ状磁石に触れているが，電子波が磁石と触れた瞬間，電子波が磁場によって影響を受け，干渉縞がずれたのである」．波動関数の収縮などの“観測理論の研究”をやっていた研究者ならではの意見である．反論の論文を書くことも考えたが，実験家としては，すべての理論家に有無を言わせぬ条件で実験を行いたいと考えた．ベクトル・ポテンシャル問題は，ファラデーの時代から数えて 150 年にも及ぶ懸案である．

幸いにも，ヤン先生は ISQM で新しい実験の提案を行った．「ドーナツ状の磁石を超伝導体で包んでみなさい．超伝導の基本現象が，AB 効果によってドラマチックに観察できるはずである」．

9.6 完璧な検証実験

この実験は考えただけでも難しそうだった．まず，サンプル作りが容易ではない．それから毎日のように夕方になると日立中研のジョセフソン素子の川辺潮さんのところに通いつめてサンプル作りへの協力をお願いした．その結果，根負けをして極めつけの微細加工技術を駆使して挑戦してくれることになった．このサンプルは，電子顕微鏡の中で極低温に冷やす必要がある．液体ヘリウムで[傍注6]サンプルを冷やすことのできる試料ステージ[傍注7]の開発も併行して開始した．

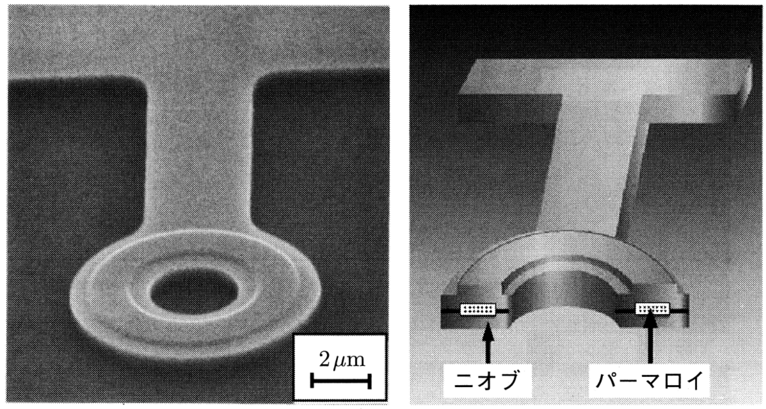
実験が完成したのは，3 年後の 1986 年，第２回 ISQM の直前だった．サンプルは，円形のドーナツ状の磁石の周りをニオブ[傍注8]が取り囲んでいる（図 9.4）．サンプルを 5 K まで冷やすと，ニオブは超伝導状態になる．マイスナー効果[傍注9]のために磁石内部を流れる磁場は外に漏れる可能性はない．

[傍注6]　気体は温度を下げると液体になる．液体ヘリウムは液体になりにくいが，絶対温度 4.2 K まで冷やすと液体になる．この液体で直接，あるいは熱伝導でサンプルを冷やすと，4.2 K 近くまでサンプルを冷やすことができる．

[傍注7]　電子顕微鏡用のサンプルをのせて，前後左右に動かす台．サンプルを傾ける場合もある．

[傍注8]　典型的な超伝導材料で，9.3 K 以下に冷やすと超伝導状態になる．

[傍注9]　ニッケルと鉄の合金で，磁性材料として使われる．超伝導体に磁場をかけると，磁場は超伝導体の内部から排除される．超伝導体を磁場が通りぬけられないという性質は，発見者の R. マイスナーの名前をとって“マイスナー効果”と呼ばれている．この性質のために，ドーナツ状磁石の周囲を超伝導体で取り囲んだサンプルからは，外部に磁場が出て来ることはない．



(a) (b)

図 9.4 超伝導体で囲んだドーナツ状磁石.

このサンプルは，さらに銅で表面を覆ってあるので，電子線が磁石に触れることはない．このような形のサンプルができ上がるには，四苦八苦した．サンプルの設計変更も何度かあった.「磁石の周りを超伝導体で完全に取り囲むために，まずニオブの膜を表と裏から重ねる．そして十分なノリシロを残して，ドーナツの孔をあけ，同時に外形を切り出す.「ノリシロを十分取るために，ドーナツはなるべく大きくしてほしい」という微細加工の側からの意見に負けたのがいけなかった．ドーナツの外径を 15 μm にした．その結果，磁石は，細いリング状になってしまった．ドーナツには，逆向きの磁区がたくさんできて，内部で閉じていなければならない磁力線が，外に漏れてしまった．設計のやり直しだった．ドーナツの直径を半分近くまで小さくし，磁石の外に磁場が漏れないことを干渉顕微鏡像で確かめてから，超伝導体で囲んだサンプルを作った．

［傍注 10］ カーボン（炭素）でできた，極めて薄い膜.

こんなこともあった．ドーナツ状の形のサンプルを薄いカーボン膜[傍注 10]の上にのせて電子顕微鏡の中で冷やしてみた．だが，一向に超伝導状態になる気配がない．サンプルが超伝導状態になれば，磁場をかけたときの電子線の反応でわかる.「サンプルをカーボン膜の上にのせただけでは，サンプルは 9 K 以下に冷えていない」という結論に達した．

再度の設計変更だった．だが，微細加工で形状を変えるには，フォトマスク作りから始めなければならない．今度は大きなニオブの板から枝を出して，その先にドーナツ状サンプルを取り付けることにした．図 9.5 がその写真である．ニオブの板を冷やせば，サンプルも同時に冷える．写真からドーナツの外径や内径が，まちまちであることが分かる．コイルの場合には，流す電流で磁束の値を連続的に変化させることができる．磁石の場合には，そうはいかない．このため，大きさの違う磁石をたくさん作った．失敗したものを入れると 10 万個も作っただろうか．こんなにたくさんのサンプルを一気に作ることができたのも，ひとえに微細加工技術のお陰である．

磁石の周りが超伝導体で完全に取り囲まれていることは，磁束量子化現象を観測して確認した．このような条件下に得た写真（図 9.6）は，干渉縞のずれを

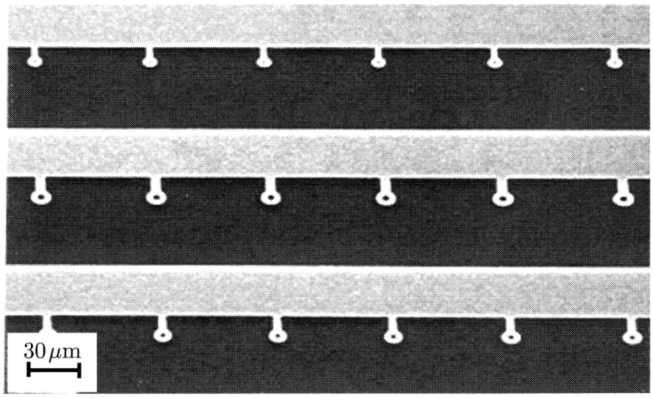


図 9.5　ニオブの板に接続したたくさんのドーナツ状サンプル．超伝導体で囲んだドーナツ状磁石をニオブの板につなげて，やっとサンプルが冷えるようになった．磁束の値を変えるため，外径，内径の異なるドーナツ状サンプルをたくさん作った．

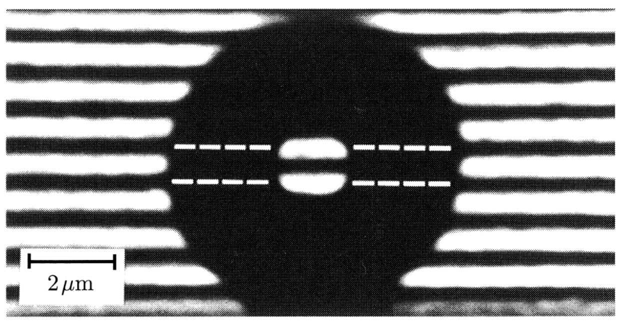


図 9.6　AB 効果の検証写真．ドーナツ内外の位相はちょうど $\frac{1}{2}$ 波長だけずれており，AB 効果の存在は証明された．この場合，磁石の内部には奇数本の磁束量子が通っている．偶数本の場合には干渉縞は内外で一致し，ずれない．

はっきりと映し出し，AB 効果の存在は証明された．干渉縞はちょうど 1/2 波長分だけずれている．これには訳がある．サンプルの温度を冷やして，取り巻いているニオブが超伝導状態になると，磁束が量子化する現象が起こる．パーマロイでできた磁石の磁束は磁石の太さで決まるので量子化されていないが，超伝導体で完全に取り囲まれたとたん，超伝導体に周回電流が流れて $h/2e(= 2 \times 10^{-15}$ ウェーバー) の整数倍で量子化される．完全に超伝導体で囲まれた磁場はマイスナー効果によって外に漏れ出すことが禁止される．1/2 波長で位相差が量子化していることは，磁場が外部に漏れていないことの証拠である．

かくして AB 効果はまさしく存在することが証明され，AB 効果の存在に関する論争は終結を見た．

参考文献

1)　E. Merzbacher: *Am. J. Phys.* **30** (1962) 237–247.

（とのむら・あきら，日立製作所フェロー／理化学研究所グループ・ディレクター／沖縄科学技術研究基盤整備機構代表研究者）

問題例で深める物理 Problem Answer Discussion 第3回

二項分布からカノニカル分布へ

香取 眞理・中野 徹

統計力学は確率分布を扱うが，確率・統計の単なるバリエーションではない．原子や分子の集団が従う確率法則から熱力学の法則を理解しようとするユニークな物理学体系である．いろいろな量が簡単に計算できる二項分布と二準位系の問題を用いて，確率・統計と統計力学との絶妙な関係を見てみよう．

3.1 二項分布の平均と分散

サイコロを 10 回投げたとき 1 の目が 4 回出る確率はいくらか．サイコロの 1 の目の出る確率は毎回同じで $p=1/6$ である．このように，ある特定の事象（いま述べたサイコロの例では，1 の目が出るということ）が起こる確率 p の値が，試行（サイコロを投げること）のたびに変わることなく一定であるとき，**ベルヌーイ試行**と言う．試行回数を N として，事象が起こる回数を X とする．X は**確率変数**であり，$X=n$ である確率は，$q=1-p$ として

$$
\begin{aligned}
P(n) &= \mathrm{Prob}(X=n) \\
&= \begin{cases} {}_N C_n p^n q^{N-n} & (0 \le n \le N) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

で与えられる．ただし，${}_N C_n = N!/\{n!(N-n)!\}$ である．確率の値が二項展開

$$
(p+q)^N = \sum_{n=0}^{N} {}_N C_n p^n q^{N-n} \qquad (3.2)
$$

の各項に対応することから，(3.1) 式は**二項分布**と呼ばれる．冒頭に問うた確率は，したがって ${}_{10}C_4 (1/6)^4 (5/6)^6 \fallingdotseq 0.054$ である．

> **定義** 離散確率変数 X に対して分布関数 $P(n)$ が与えられたとき，**平均**と**分散**はそれぞれ
>
> $$\langle X \rangle = \sum_n n P(n), \qquad (3.3)$$
>
> $$\begin{aligned} \sigma^2 &\equiv \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \\ &= \sum_n (n - \langle X \rangle)^2 P(n) \qquad (3.4) \end{aligned}$$
>
> で定義される．

問題 3.1 二項分布の平均と分散を求めなさい．

解答 $p+q=1$ なので，(3.2) 式は

$$
\sum_{n=0}^{N} {}_N C_n p^n (1-p)^{N-n} = 1 \qquad (3.5)
$$

である．この両辺を p で微分すると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N} {}_N C_n \Big\{ n p^{n-1} (1-p)^{N-n} \\
&\qquad - (N-n) p^n (1-p)^{N-n-1} \Big\} = 0
\end{aligned}
$$

となるが，これは

$$
\frac{1}{p} \sum_{n=0}^{N} n \, {}_N C_n p^n q^{N-n} - \frac{N}{1-p} \sum_{n=0}^{N} {}_N C_n p^n q^{N-n}
$$

$$+\frac{1}{1-p}\sum_{n=0}^{N} n_N C_n p^n q^{N-n} = 0$$

と書き直せる．ところがこの等式にある3つの和のうち，2番目のものは(3.5)式より1，あとの2つの和は定義(3.3)より$\langle X\rangle$なので

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{1-p}\right)\langle X\rangle - \frac{N}{1-p} = 0$$

ということになる．これから，平均は

$$\langle X\rangle = \sum_{n=0}^{N} n_N C_n p^n q^{N-n} = Np \qquad (3.6)$$

と定まる．

(3.5)式は「確率の総和は1である」という自明な式であるが，それをpで微分すると平均に対する公式が得られるのである．分散を求めるには，今度は，この平均の公式(3.6)の両辺をpで微分すればよい．(つまり，「自明な式」をパラメータpで2回微分すればよい．) 少し計算すると

$$\sigma^2 = \sum_{n=0}^{N} n^2{}_N C_n p^n q^{N-n} - (Np)^2 = Npq$$

と求められる．■

別解　N回の試行のうち，j回目の試行の結果を次のような確率変数Y_jで表すことにする．

$$Y_j = \begin{cases} 1 & (\text{確率 } p), \\ 0 & (\text{確率 } q = 1-p), \end{cases}$$

$1 \le j \le N$. サイコロ投げの例で言うと，j回目に出た目が1なら$Y_j = 1$，他の目なら$Y_j = 0$ということである．当然$X = \sum_{j=1}^{N} Y_j$なので$\langle X\rangle = \sum_{j=1}^{N}\langle Y_j\rangle$であるが，ベルヌーイ試行なので$j$に依らず$\langle Y_j\rangle = p$. よって$\langle X\rangle = Np$が得られる．また，

$$\langle X^2\rangle = \left\langle \left(\sum_{j=1}^{N} Y_j\right)^2 \right\rangle = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\langle Y_j Y_k\rangle$$
$$= \sum_{j=1}^{N}\langle Y_j^2\rangle + 2\sum_{1\le j<k\le N}\langle Y_j Y_k\rangle$$

であるが，$\langle Y_j^2\rangle = \langle Y_j\rangle = p$であり，またベルヌーイ試行の独立性より$\langle Y_j Y_k\rangle = \langle Y_j\rangle\langle Y_k\rangle = p^2$なので，$\langle X^2\rangle = Np + N(N-1)p^2$. これから$\sigma^2 = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2 = Npq$と求められる．■

3.2 二準位系の統計力学

N個の独立な粒子からなる系を考える．各々の粒子は$-\varepsilon$とεの2つのエネルギー状態しかとり得ないものとする($\varepsilon > 0$とする)．このような系を**二準位系**と言う．

エネルギーが高い状態よりエネルギーが低い状態のほうが起こりやすいというのは一般常識であるが，前者（励起状態）の実現確率の後者（基底状態）の実現確率に対する比が，絶対温度Tの熱平衡状態では

$$e^{-2\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T} \qquad (3.7)$$

で与えられるというのが，統計物理の常識である．ここでk_{B}は，気体定数$R \fallingdotseq 8.31$ [J/mol·K]をアボガドロ数$N_{\mathrm{A}} \fallingdotseq 6.02\times 10^{23}$ [1/mol]で割った値であり，**ボルツマン定数**$k_{\mathrm{B}} \fallingdotseq 1.38\times 10^{-23}$ [J/K]と呼ばれる．(3.7)全体を**ボルツマン因子**と言う．各粒子が励起状態にある確率をp，基底状態にある確率をqとすると，両者の比p/qがボルツマン因子(3.7)で与えられるというわけである．当然$p+q=1$なので，これから

$$p = \frac{e^{-\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T}}{e^{-\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T}+e^{\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T}}, \quad q = \frac{e^{\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T}}{e^{-\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T}+e^{\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T}} \qquad (3.8)$$

と定まる．絶対零度$T=0$なら励起は絶対に起こらないので$p/q=0$. 温度が上がるにつれてp/qは単調に増大し，$T\to\infty$で$p/q\to 1$になる．

> **問題 3.2**　絶対温度Tの熱平衡状態にある二準位系に対して，系のエネルギーEの分布関数を書き下しなさい．

解答　励起状態にある粒子数がn個であるとき，N粒子系の総エネルギーは

$$E = \varepsilon n + (-\varepsilon)(N-n)$$
$$= (2n-N)\varepsilon \quad (3.9)$$

である．これは

$$n = \frac{N}{2} + \frac{E}{2\varepsilon} \quad (3.10)$$

とも書ける．粒子はおのおの独立に，確率 p で励起し，確率 $q = 1-p$ で基底状態に留まる．つまり，各粒子のエネルギー状態はベルヌーイ試行によって決められると考えてよい．したがって，二準位系のエネルギー分布は二項分布

$$P(E) = {}_N C_n p^n q^{N-n} \quad (3.11)$$

で与えられることになる．以下，(3.8) 式と関係式 (3.9)（あるいは (3.10)）を用いて，この二項分布の分布関数を書き直していく．まず

$$r = e^{-\varepsilon/k_B T}, \quad s = e^{\varepsilon/k_B T}$$

とおいて，(3.8) 式の p と q を $p = r/(r+s), q = s/(r+s)$ と書くことにする．二準位のちょうど真ん中をエネルギーの原点 $E=0$ と定め，この基準状態に対する励起状態のボルツマン因子を r，基底状態のボルツマン因子を s としたということである．すると，二項分布の式 (3.11) は $P(E) = {}_N C_n r^n s^{N-n}/(r+s)^N$ となるが，関係式 (3.9) を用いると $r^n s^{N-n} = e^{-(2n-N)\varepsilon/k_B T} = e^{-E/k_B T}$．また $(r+s)^N = \sum_{E=-N\varepsilon}^{N\varepsilon} {}_N C_{N/2+E/2\varepsilon} e^{-E/k_B T}$．こうして，エネルギー分布関数に対して

$$P(E) = \frac{1}{Z} {}_N C_{N/2+E/2\varepsilon} e^{-E/k_B T} \quad (3.12)$$

という表現が得られる．ただしここで

$$Z = \sum_{E=-N\varepsilon}^{N\varepsilon} {}_N C_{N/2+E/2\varepsilon} e^{-E/k_B T} \quad (3.13)$$

である． ■

(3.12) 式の分布は統計力学で習う**カノニカル分布**（**正準分布**）である．Z は**分配関数**あるいは**状態和**と呼ばれる．つまり，二項分布はカノニカル分布の特別な場合なのである．

3.3 ショットキー型比熱

熱平衡状態にある物質のエネルギーの平均をその系の**内部エネルギー**と言う．これを U と記すことにする．

$$U = \langle E \rangle = \sum_{E=-N\varepsilon}^{N\varepsilon} E P(E). \quad (3.14)$$

物質の温度を 1 度上げるのに物質に加えなければならない熱量 Q [J] を**熱容量**と言う．したがって，物質が絶対温度 T にあるときにもっている内部エネルギーは，その物質の熱容量を絶対零度からその温度まで積分したものに等しい．逆に言えば，内部エネルギーを温度で微分すると熱容量が得られる．これは物質の容量に比例するが，それを 1 粒子あたりとか 1 モルあたりに比例換算したのが比熱容量，略して**比熱**である．それでは比熱の確率分布的な表現はどのように与えられるか．

問題 3.3　比熱は系のエネルギーの分散に比例することを導き，その比例定数は絶対温度の 2 乗に反比例することを示しなさい．

解答　(3.14) 式を T で微分して，粒子数 N で割ると，1 粒子あたりの比熱

$$c = \frac{1}{N}\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{1}{N k_B T^2}\sigma_E^2 \quad (3.15)$$

が得られる．ここで

$$\sigma_E^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle \quad (3.16)$$

である．(3.16) 式の形が出てくるのは，高校で習った懐かしい微分の公式 $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$ を使ったからである．T^{-2} という因子は，微分 $d(T^{-1})/dT = -T^{-2}$ に起因する． ■

問題 3.4　絶対温度 T の熱平衡状態における二準位系の内部エネルギー U と 1 粒子あたりの比熱 c を求めなさい．

解答　励起粒子数の平均を $\langle n \rangle$，分散を σ^2 と書くと，関係式 (3.9) より

$$\langle E \rangle = (2\langle n \rangle - N)\varepsilon, \quad \sigma_E^2 = 4\varepsilon^2\sigma^2.$$

よって，問題 3.1 の答を用いると

$$U=(2p-1)N\varepsilon,\quad \sigma_E^2=4\varepsilon^2 Npq.$$

そこで (3.8) 式と (3.15) 式を用いると

$$\begin{aligned} U &= -N\varepsilon\tanh(\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T),\\ c &= k_{\mathrm{B}}\frac{(\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T)^2}{\cosh^2(\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T)} \end{aligned}\tag{3.17}$$

が得られる．■

問題 3.5　二準位系の比熱には，ある温度でピークが見られることを示しなさい．

解答　二準位のエネルギー差を 2ε とすると，絶対温度 T の熱平衡にある二準位系のエネルギー分布の分散は

$$\sigma_E^2=\frac{\varepsilon^2 N}{\cosh^2(\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T)}$$

で与えられることを上で見た．$\cosh^2 x$ は $x\geq 0$ では x の単調増加関数なので，σ_E^2 が T の単調増加関数であることは明らかである．これは $T\to 0$ で指数関数的に零になり，$T\to\infty$ で有限値 $\varepsilon^2 N$ に収束する．他方 $1/(Nk_{\mathrm{B}}T^2)$ は T の単調減少関数である．($T\to 0$ で 2 乗発散，$T\to\infty$ で零.）以上より，この 2 つの積 (3.15) で与えられる 1 粒子あたりの比熱 (3.17) は $T\to 0$ と $T\to\infty$ でともに零になり，ある有限の温度でピークをもつことが結論される．図 3.1 は比熱をボルツマン定数 k_{B} を単位にして計った値（ボルツマン定数は熱容量と同じ次元である）を $k_{\mathrm{B}}T/\varepsilon$ に対して描いたものである．$k_{\mathrm{B}}T/\varepsilon \fallingdotseq 0.84$ にピークが位置する．■

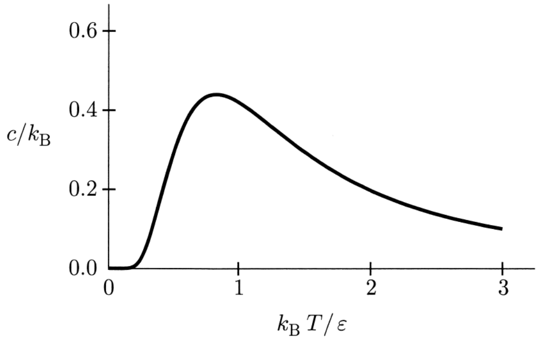


図 3.1　ショットキー型比熱．

この形の比熱は**ショットキー型比熱**と呼ばれ，様々な実験で観測されている．測定されたピークの形や位置から，物質のエネルギー準位に対する情報が得られる．

3.4 母関数と自由エネルギー

本稿冒頭の問題 3.1 の解答で，確率の総和は 1 であるという自明な式 (3.5) をパラメータ p で微分していくと平均と分散に対する公式が得られることを示した．このようなことを一般化して考えるには，母関数を導入するのがよい．p とは別のパラメータ ξ を使って，**母関数**を

$$\Phi(\xi)=\langle e^{\xi X}\rangle$$

と定義する．この両辺を ξ で微分して $\xi=0$ とおくと $\langle X\rangle=\Phi'(0)$ という公式が得られる．ただし，$\Phi'(\xi)=d\Phi(\xi)/d\xi$ である．つまり，母関数の $\xi=0$ における微係数として，確率変数 X の平均が求められるのである．同様に分散は $\sigma^2=\Phi''(0)-(\Phi'(0))^2$ というように母関数の 2 階微分 $\Phi''(\xi)=d^2\Phi(\xi)/d\xi^2$ を用いて与えられる．一般に k **次のモーメント** $\langle X^k\rangle$ は，母関数の k 階微分を $\Phi^{(k)}(\xi)$ と記すことにすると，$\langle X^k\rangle=\Phi^{(k)}(0)$ で与えられる．

問題 3.6　二項分布の母関数を求めなさい．

解答　二項分布の分布関数 (3.1) を用いると

$$\begin{aligned}\langle e^{\xi X}\rangle &= \sum_n e^{\xi n}P(n)\\ &= \sum_{n=0}^{N} {}_N C_n p^n q^{N-n} e^{\xi n}\end{aligned}\tag{3.18}$$

なので

$$\Phi(\xi)=(pe^{\xi}+q)^N \tag{3.19}$$

と求まる．■

別解　問題 3.1 の別解の考え方に従うと

$$\langle e^{\xi X}\rangle = \langle e^{\xi(Y_1+Y_2+\cdots+Y_N)}\rangle = \prod_{j=1}^{N}\langle e^{\xi Y_j}\rangle$$

である．$j \neq k$ なら Y_j と Y_k は独立なので $\langle e^{\xi Y_j}e^{\xi Y_k}\rangle = \langle e^{\xi Y_j}\rangle\langle e^{\xi Y_k}\rangle$ であるからである．また，j の値によらず $\langle e^{\xi Y_j}\rangle = pe^{\xi\times 1} + qe^{\xi\times 0} = pe^{\xi} + q$ なので，(3.19) 式が得られる． ■

(3.19) 式で $\xi = 0$ とおくと，$\Phi(0) = (p+q)^N = 1$ となり (3.5) 式となる．$\Phi(\xi)$ は，この「自明な式」にパラメータ ξ を導入して，関数に格上げしたものである．もはや自明な関数ではない．これを微分していくとすべてのモーメントが生み出されるので，母関数と呼ばれるのである．

さて，問題 3.2 の解答で，二項分布は統計力学のカノニカル分布の特別な場合であることを見た．ならば，母関数に相当する関数が統計力学でも重宝されているに違いない．それは何であろうか．それは**ヘルムホルツの自由エネルギー** F であるというのが答なのであるが，ここで注意すべき点がある．確率・統計の問題から統計力学の問題に移行する際の注意点である．

問題 3.1 では，ベルヌーイ試行において，各試行で事象が起こる確率 p をパラメータとしてこれについての微分を計算した．また，上で母関数を定義したときには，別に補助的なパラメータ ξ を導入して，それで母関数を微分することを考えた．これに対して統計力学では，パラメータとしては，熱力学で系のマクロな状態を指定するときに用いるもののみを使用するのが正統である．その一つが絶対温度 T である．実際，第 3.2 節で見たように，物質の比熱は内部エネルギーを温度 T で微分することによって得られた．二準位系の例を思い出すと，(3.8) 式で示されているように，二項分布のパラメータ p は温度 T の関数であるから，p での微分を考える代わりに T での微分を考えても良いことが分かる．統計力学では，絶対温度 T で微分すると内部エネルギーや比熱が導かれるような母関数を考えるのが自然であることになる．余計なパラメータ ξ などは用いない．もう一つ注意点がある．二項分布のときは確率 p と q を用いて (3.18) 式のように母関数を定義するのであるが，統計力学ではボルツマン因子である r と s のほうを用いて考えるほうが普通である．つまり，$\sum_{n=0}^{N} {}_NC_n r^n s^{N-n}$ を考える．問題 3.2 の解答で見たように，これは分配関数 (3.13) であり，ヘルムホルツの自由エネルギーは

$$F = -k_{\mathrm{B}}T\log Z \tag{3.20}$$

と定義される．分配関数の対数をとったのは

$$\frac{\partial}{\partial T}\log Z = \frac{Z'}{Z}$$

であり，これが $U = \langle E\rangle$ に比例するからである．それでは，定義式 (3.20) で $\log Z$ の前に $-k_{\mathrm{B}}T$ をかけてあるのはどうしてなのであろうか．$\log Z$ は無次元量であり，$-k_{\mathrm{B}}T$ をかけることによってはじめて自由エネルギー F にエネルギーの次元を与えることができる．それはそうなのであるが，こんな因子があると内部エネルギーと F との関係は

$$U = \langle E\rangle = F - T\frac{\partial F}{\partial T} \tag{3.21}$$

となり，何だかイマイチ綺麗でない感じである．

ところがこれでよいのである．熱力学ではヘルムホルツの自由エネルギーは温度 T と系の体積 V の関数であり，その全微分は $dF = -SdT - pdV$ で与えられるのであった．ここで S はエントロピー，p は圧力である．つまり

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad p = -\frac{\partial F}{\partial V} \tag{3.22}$$

ということである．このような式を**熱力学的関係式**と言う．(3.22) の第 1 式を用いると，イマイチ…に思えた (3.21) 式は $F = U - TS$ となる．これは熱力学におけるヘルムホルツの自由エネルギーの定義式に他ならない．(二準位系の準位差 2ε は系の体積に依存する．よって，圧力は (3.22) の第 2 式より $p = -\partial F/\partial V = -(\partial F/\partial\varepsilon)(d\varepsilon/dV)$ で与えられることになる．(3.22) の第 1 式にある T による偏微分は $V =$ 一定での微分であるが，二準位系の問題では，これは $\varepsilon =$ 一定という意味である．)

統計力学は確率・統計と関係が深いが，熱力学との対応関係を強く意識して構成された物理学の理論なのである．

3.5 ボルツマンの墓標

問題 3.7　二準位系のヘルムホルツの自由エネルギーを求め，エントロピーを計算しなさい．

解答

$$Z = (e^{-\varepsilon/k_BT} + e^{\varepsilon/k_BT})^N = \{2\cosh(\varepsilon/k_BT)\}^N$$

なので，ヘルムホルツの自由エネルギーは

$$F = -Nk_BT\log\{2\cosh(\varepsilon/k_BT)\}$$

である．よって，絶対温度 T の熱平衡状態にある二準位系のエントロピーは，(3.22) の第1式より

$$S = Nk_B\Big[\log\{2\cosh(\varepsilon/k_BT)\} - \frac{\varepsilon}{k_BT}\tanh(\varepsilon/k_BT)\Big] \quad (3.23)$$

と求められる．■

さて，統計力学において，確率変数のモーメントの母関数の役割を果たすのが自由エネルギー F であると述べた．また，そのときのパラメータは温度 T（と $V = V(\varepsilon)$）であるとも言った．ところが，(3.22) の第1式が示すように，自由エネルギー F を温度 T で偏微分して得られるのは，エネルギーの平均 $\langle E\rangle$ ではなく，エントロピー S という熱力学量であった．熱平衡状態にある二準位系のカノニカル分布は二項分布と等価であるという第3.2節での話を思い返すと，エントロピーという物理量に対しても，確率分布的な表現が与えられるはずである．比熱がエネルギーの分散で表されたようにである（問題 3.3）．

(3.8) 式を用いると，(3.23) 式は

$$S = -k_BN\Big(p\log p + q\log q\Big)$$

と書き直せる．これは，二項係数の $N\to\infty$ での漸近挙動を表しているのである．$\log({}_NC_n) = \log[N!/\{n!(N-n)!\}]$ に対して，$N, n, N-n$ のいずれも大きいとして**スターリングの公式**

$$\log x! \simeq x\log x - x, \quad x\to\infty$$

を用いると，$N\to\infty$ で

$$\log({}_NC_n) \simeq -N\left(\frac{n}{N}\log\frac{n}{N} + \frac{N-n}{N}\log\frac{N-n}{N}\right)$$

となることが示せる．また，試行回数 $N\to\infty$ では

$$\frac{n}{N}\to p, \quad \frac{N-n}{N}\to q$$

となるはずである（**大数の法則**）．つまり，二準位系のエントロピーは二項係数の対数にボルツマン定数 k_B をかけた値と $N\to\infty$ では漸近的に等しくなるのである．

二準位系において ${}_NC_n = {}_NC_{N/2+E/2\varepsilon}$ は，エネルギーの値が E の状態の縮重度（重率）W である．よって，上で述べた結果は，粒子数 $N\to\infty$ の極限（**熱力学的極限**）で，次の関係式が成り立つことを示唆する．

$$S = k_B\log W.$$

この式はウィーン中央墓地の Gruppe 14 C にあるボルツマンの墓標に刻まれている．ショットキー型比熱のところでボルツマン定数 k_B の次元 [J/K] は熱容量の次元であることを注意したが，それはまたエントロピーに与えられた次元なのである．

（かとり・まこと，中央大学理工学部）
（なかの・とおる，中央大学理工学部）

特　集（2009年5月号予告）

微積分を楽しむ

数理を見る目，語る言葉

微積分の力を身につけるには	河東　泰之
力学と微積分	岩井　敏洋
ε–δ 論法の直観的理解	金子　晃
多変数の微積分	平地　健吾
電磁気学と微積分	加藤　光裕
数値計算と微積分	齊藤　宣一
確率論からのルベーグ積分入門	乙部　厳己
ファイナンスで使う微積分	中川　秀敏
［コラム］	前野　昌弘
［コラム］	吉野　邦生
［インタビュー］	河東　泰之
《名著に親しむ》	薩摩　順吉

本体 952 円

特　集（2009年3月号）

方程式に潜む対称性

“美しさ” から探る方程式の見方

世界の形，方程式の形	砂田　利一
対称性，不変性，保存則　ケプラー運動を例にして	中村　孔一
シュレーディンガー方程式とディラック方程式における対称性　量子力学	新井　朝雄
ソリトン方程式の対称性　可積分系	武部　尚志
パンルヴェ方程式と対称性	坂井　秀隆
無質量自由場の方程式と対称性　スピナーとツイスター	高崎　金久
ヤン・ミルズ方程式と対称性　素粒子物理	橋本　義武
アインシュタイン方程式と対称性	白水　徹也
繰り込み群方程式と対称性	園田　英徳
《名著に親しむ》求積法の復活へ向けて	大山　陽介
《連載》　問題例で深める物理　その2	香取　眞理 中野　徹
《数学の道しるべ》　第6回	斎藤　恭司

本体 952 円

編集後記

今回は，3年に亘って続いているシリーズ特集の第3弾になりますが如何でしたでしょうか．巻頭の小島先生は，幾何学という広大な沃野を歩くには “節操のなさ” が必要だとおっしゃっています．節操のなさ＝とらわれない思想＝ボーダレスな発想．そんな図式を頭に描きながら特集記事を旅してみると，その視野の広さに得心です．そんな現代の幾何学百景をじっくりとご堪能ください．　(N)

＊　　＊

幾何の面白さは私たちの身近にある多くの図形の性質を調べることにあると思います．

有名なユークリッド幾何学は，中学や高校で触れた方も多いのではないでしょうか．私もたくさんの定理の証明を勉強することができ，大変面白かったことを覚えています．手を動かしたり，頭を使うことなので，また勉強し直すのもいいかもしれません．　(R)

数　理　科　学　4月号

2009年4月1日発行

数　理　科　学　編　集　部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　ⓒ　株式会社　**サ　イ　エ　ン　ス　社**　　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁